Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig **WS 2015/2016**

Variationsrechnung

9. Übung

Abgabe: Montag, 21. 12. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

(a) Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass wir $H_0^{1,1}(a,b)$ mit der Menge

$$\{u \in C[a,b]\ ;\ u(a) = u(b) = 0 \text{ und } \exists (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } C_0^\infty(a,b) :\ \|u - u_k\|_{1,1} \to 0\}$$

identifizieren können.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ die Abschätzung

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{1,1}$$

gilt.

(b) Sei $a < b$ und $u \in W_0^{1,1}(a,b)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{u}(x) := \int_a^x u'(s)\,\mathrm{d}s$$

stetig ist, schwach differenzierbar ist und fast überall mit u übereinstimmt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ heißt gleichmäßig konvex, falls es ein $\theta > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i,j=1}^k \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^k$ und $x \in \mathbb{R}^k$.
Zeigen Sie, dass gleichmäßig konvexe Funktionen insbesondere konvex sind.
Hinweis: Verwenden Sie eine passende Charakterisierung der Konvexität aus Aufgabe 3, Übung 2.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ein Normalgebiet und $f \in C(\overline{\Omega})$. Berechnen Sie für die folgenden Funktionale ($1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$)

$$\mathcal{G}_p(u) := \int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p - fu\,\mathrm{d}x \qquad \text{auf } W_0^{1,p}(\Omega)$$

und

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) := \int_\Omega \sqrt{\varepsilon^2 + |Du|^2} - f u \,\mathrm{d}x \qquad \text{auf } W^{1,2}(\Omega)$$

die erste Variation und leiten Sie daraus jeweils die schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichung und die jeweilige Randbedingung ab.
Wie lautet der formale Grenzwert dieser Gleichungen für $p \to 1$ beziehungsweise $\varepsilon \to 0$? Welche möglichen Definitionsprobleme sehen Sie bei dieser Gleichung?

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$F(u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad\qquad (x \in \Omega)\,, \tag{1}$$

dabei ist $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n)$ eine gegebene Funktion und $\mathcal{S}(n)$ bezeichnet den Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.
Die Differentialgleichung (1) heißt *degeneriert elliptisch*, wenn für alle $r \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ die Implikation

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad F(r, p, X) \leq F(r, p, Y)$$

gilt (die Ordnung $Y \leq X$ ist dabei im Sinne der von X bzw. Y induzierten quadratischen Formen, d. h. $X - Y$ ist positiv semidefinit, zu verstehen).
Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung zu dem Funktional $\mathcal{F}_\varepsilon$ von Aufgabe 3 degeneriert elliptisch ist.
Hinweis: Dazu müssen Sie die klassische Form der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung ausdifferenzieren und geeignet umformen.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html