Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2015/2016**
Dr. S. Littig

Variationsrechnung

10. Übung

Abgabe: Montag, 11. 01. 2016, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Gegeben sei $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten das Energiefunktional $\mathcal{E} : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega W(|Du|) \, \mathrm{d}x \, .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ konvex ist, wenn W monoton wachsend ist. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass man auf diese Bedingung an W im Allgemeinen nicht verzichten kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir zeigen zwei Details des Beweises von Satz 8.2.

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und $\mathcal{O}$ eine offene Menge, sodass $\mathcal{O} \cap \partial\Omega$ eine zweimal stetig differenzierbare Parametrisierung in $\mathcal{O}$ besitzt. Die Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ sei schwache Lösung der Euler-Gleichung, d. h.

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2} \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $a(u, v) := \int_\Omega Du \cdot Dv + auv \, \mathrm{d}x$ für ein gegebenes $a \in C(\overline{\Omega})$ mit $a \geq 0$ (dies ist ein etwas speziellerer Fall als in der Vorlesung). Ferner sei $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ eine Abschneidefunktion in Ω, d. h. $0 \leq \eta \leq 1$. Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $g \in L^2(\Omega')$, so dass

$$a(v, \varphi) = (g, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega')$$

dabei ist $v := \eta u$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie außerdem, dass g einer Abschätzung

$$\|g\|_2 \leq c\|f\|_2$$

genügt.

(b) In Schritt 2 hatten wir dann den Rand mit Hilfe einer Koordinatentransformation T glatt gebügelt. Zeigen Sie (mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung), dass

(i) $\hat{g} \in L^2(\Omega)$ und $\|\hat{g}\|_2 \leq c_1\|g\|_2$,

(ii) $\hat{a}_{\nu,\mu} \in C^1(\overline{Q})$, $\hat{a} \in C(\overline{Q})$, sowie $\max_{\nu,\mu} \|\hat{a}_{\nu,\mu}\|_{1,\infty} \leq c_2 \max_{\nu,\mu} \|\hat{a}_{\nu,\mu}\|_{1,\infty}$ und $\|\hat{a}\|_\infty \leq c_3\|a\|_\infty$ und

(iii) es gilt $\hat{a} \geq 0$ und die Matrix $(\hat{a}_{\nu,\mu})_{1\leq\nu,\mu\leq n}$ ist wieder positiv definit.

(4+2=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Für $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a \geq 0$, sei eine Funktion $u \in H^1(0,1)$ schwache Lösung der der Differentialgleichung

$$-u'' + au = f \qquad \text{auf } (0,1)\,.$$

Von f ist bekannt, dass $f \in H^{2015}(0,1)$. Zeigen Sie, dass u dann sogar in $H^{2017}(0,1)$ liegt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Der Rentierschlitten des Weihnachtsmanns ist kaputt gegangen und er muss dieses Jahr die Weihnachtsgeschenke mit seinen Ski ausliefern. Gerade hat er die Kinder in A-Dorf versorgt und muss nun so schnell wie möglich weiter nach B-Stadt. Die beiden Orte liegen im Gebirge und es trennt sie ein Höhenunterschied von 500 m. Beide Orte liegen an einem Hang, der als ebene Fläche angesehen werden kann. B-Stadt liegt 3 km in x-Richtung und 4 km in y-Richtung von A-Dorf entfernt (siehe Skizze).
An Ski und Kittel des Weihnachtsmanns haben die Wichtel sehr lange werkeln müssen, um diese so hinzubekommen, dass der Weihnachtsmann völlig reibungsfrei den Hang hinab gleiten kann (d. h. es gilt die Erhaltung der Summe von potentieller und kinetischer Energie). Jetzt ist nur noch die optimale Fahrtkurve gesucht, auf der der Weihnachtsmann aus dem Stand so schnell wie möglich nach B-Stadt kommt.

(a) Leiten Sie her, dass man die optimale Fahrkurve (im dreidimensionalen Raum) durch $[0,2] \ni x \to (x, y(x), \sin\alpha\ y(x))$ beschreiben kann, wobei y der Minimierer des Variationsproblems

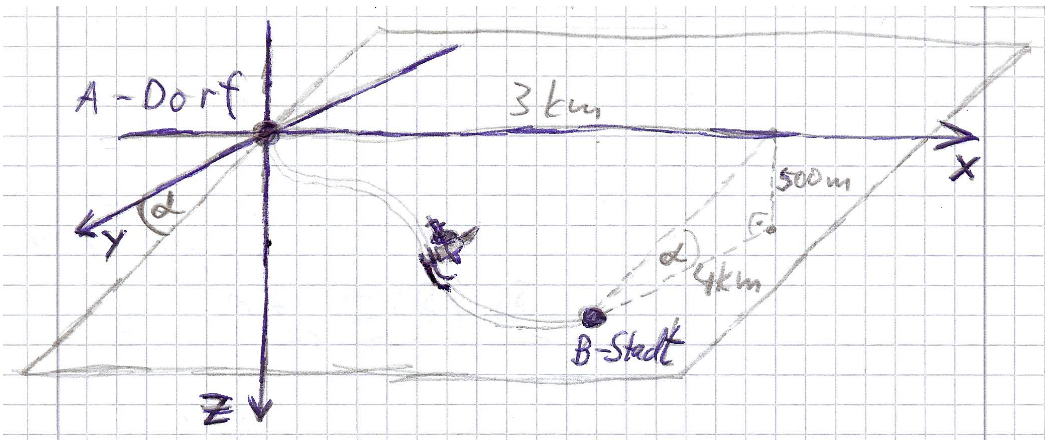
$$T(y) = \int_0^2 \frac{1 + (1+\sin^2\alpha)y'(x)^2}{2g\sin\alpha y(x)}\,\mathrm{d}x \to \text{Min}$$

ist. Dabei bezeichnet $g = 9,81m/s$ die Fallbeschleunigung und α den Neigungswinkel zwischen der Hangebene und der Horizontalen.

Welche Randbedingungen muss man an y stellen?

(b) Finden Sie die optimale Kurve und bestimmen Sie die Fahrtzeit.

Hinweis: Vergleichen Sie das Funktional mit jenem für die Brachystochrone.



(4+2=6 Punkte)

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2016!

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html
Beachten Sie bitte, dass die Übung am 08.01.2015 entgegen einer vorherigen Ankündigung doch stattfindet!