Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2015/2016**
Dr. S. Littig

Variationsrechnung
11. Übung

Abgabe: Montag, 18. 01. 2016, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Sei Ω eine messbare Menge und $1 \leq r < q \leq \infty$. Zeigen Sie: Liegt eine Funktion f in $L^r(\Omega)$ und in $L^q(\Omega)$, so liegt die Funktion f für jedes $p \in (r,q)$ in $L^p(\Omega)$ und es gilt die Normabschätzung

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta} \,,$$

wobei $\theta \in (0,1)$ die eindeutig durch

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{q}$$

bestimmte Zahl ist.
Hinweis: Schreiben Sie $p = tr + (1-t)q$ und wenden Sie in $\int_\Omega |f|^{tr} \, |f|^{(1-t)q} \, \mathrm{d}x$ die Hölder-Ungleichung an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Zu $n \in \mathbb{N}$ und $k \in 1, 2, \dots n-1$ definieren wir die Funktionen $\psi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi_k(x) := \begin{cases} 0 & x \leq \frac{k-1}{n} \\ nx - k - 1 & \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} \\ 1 - nx + k & \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \end{cases}$$

und setzen

$$D_n := \operatorname{span}\{\psi_k \, ; \; k = 1, 2, \dots n-1\} \,.$$

(a) Zeigen Sie:

$$D_n = \left\{ u \in C[0,1] \, ; \; u(0) = u(1) = 0, \; \forall j = 0, 1, \dots n-1 : \; u\big|_{\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]} \text{ affin linear} \right\}.$$

(b) Drücken Sie die Lösung von

$$\int_0^1 \frac{1}{2}|u'|^2 - 3u \, \mathrm{d}x \to \operatorname*{Min}_{u \in D_n}$$

für $n = 4$ als Linearkombination von ψ_1, ψ_2 und ψ_3 aus.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet. Betrachten Sie für $p > 2$ das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u|u|^{p-2}, \; u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass sich eine Lösung des Problems (1) mit Hilfe des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 + \lambda u^2 \,\mathrm{d}x \to \operatorname*{Min}_{u\in M} \tag{2}$$

wobei

$$M = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega) \; ; \; \int_\Omega |u|^p = 1\}$$

gewinnen lässt.

(b) Welche notwendige Bedingung muss λ erfüllen, damit ein Minimierer des Problems (2) existiert?

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $1 < p < \infty$.
Zeigen Sie, dass der Minimierer des Problems

$$\frac{\int_\Omega |Du|^p \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x} \to \operatorname*{Min}_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u>0 \text{ in } \Omega}} \tag{3}$$

bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt ist.
Gehen Sie dabei so vor:

(i) Betrachten Sie zwei Minimierer u_1 und u_2 von (3) und die Funktion $v := (u_1^p + u_2^p)^{1/p}$ und zeigen Sie, dass man Dv punktweise als Konvexkombination von $v\,D(\log u_1)$ und $v\,D(\log u_2)$ schreiben kann.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$|Dv|^p \leq |Du_1|^p + |Du_2|^p$$

gilt und begründen Sie, dass die Ungleichung strikt ist, sofern u_1 und u_2 nicht linear abhängig sind.

(iii) Führen Sie mit Hilfe von (ii) die Annahme, dass u_1 und u_2 linear unabhängige Minimierer sind, zum Widerspruch.

Hinweis zu (ii): Sie dürfen beim Nachweis von (ii) folgendes Wissen voraussetzen:

- Aus der elliptischen Regularitätstheorie ist bekannt, dass Minimierer von (3) stetig sind (für $p > n$ folgt dies leichter bereits aus der Soboleweinbettung).
- Sind w_1 und w_2 zwei lokal schwach differenzierbare Funktionen mit $Dw_1 = Dw_2$ f. ü., dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $w_1 = C + w_2$. Dieses Resultat folgt aus einer Version der Poincaré-Ungleichung.

(2+3+1=6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html