Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig

WS 2015/2016

Variationsrechnung
12. Übung

Abgabe: Montag, 25. 01. 2016, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt.

(i) Zeigen Sie, dass für $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\int_\Omega |u|^4 \,\mathrm{d}x \leq 4 \int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega |Du|^2 \,\mathrm{d}x$$

gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und benutzen (und begründen) Sie, dass man

$$\max_{t\in\mathbb{R}} u(t,x_2)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} 2|u(s,x_2)u_{x_1}(s,x_2)| \,\mathrm{d}s$$

abschätzen kann. Integrieren Sie dann $|u(x_1,x_2)|^4 \leq \max_{t\in\mathbb{R}} u(t,x_2)^2 \max_{r\in\mathbb{R}} u(x_1,r)^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $p > 2$ eine Funktion $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ bereits in $L^p(\Omega)$ liegt. *Hinweis:* Schätzen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die L^{2k}-Norm ähnlich zu Teil (i) durch ein Produkt der L^{2k-2}-Norm und der H^1-Seminorm ab.

(4+2=6 Punkte)

Aufgabe 2:
Aufgabe 1 und Aufgabe 1 vom 9. Übungblatt legen nahe, dass für den kritischen Sobolev-Exponenten $p = n$ die Einbettung $H^{1,p}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ gelten könnte. Zeigen Sie, dass dies für $n > 1$ *nicht* richtig ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \log(\log(|x|^{-1}))$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Soboleveinbettungen gelten auch für unbeschränkte Gebiete Ω, sind dann aber in der Regel nicht kompakt. Zeigen Sie, dass die Soboleveinbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$$

nicht kompakt ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten das Variationsproblem

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^1 u(t)^2 + (1 - u'(t)^2)^2 \,\mathrm{d}t \to \underset{W_0^{1,4}(0,1)}{\mathrm{Min}} .$$

(a) Zeigen Sie, dass das Infimum Null ist, es in $W_0^{1,4}(0,1)$ jedoch nicht angenommen wird.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ nicht schwach unterhalbstetig ist. *Hinweis:* Zeigen Sie dazu, dass Ihre in (a) konstruierte Minimalfolge schwach gegen Null konvergiert.

(3+3=6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html