Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2016

Variationsungleichungen

1. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 18.04.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Eine Teilmenge C eines reellen Vektorraums heißt *konvex*, wenn für alle $t \in [0,1]$ und alle $x, y \in C$ auch $tx+(1-t)y \in C$ gilt. Im Folgenden sei C nun eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Vektorraums.

(a) Zeigen Sie, dass C bereits konvex ist, wenn die Konvexititätsbedingung für $t = \frac{1}{2}$ gilt, also wenn $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$ für alle $x, y \in C$.

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Abgeschlossenheit von C tatsächlich notwendig für die Eigenschaft aus (a) ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir betrachten eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die mindestens einen endlichen Wert annimmt. Dabei heisst die Funktion f konvex, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0,1]$ gilt, dass

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man als *Subgradient* von f bei $x \in \mathbb{R}^n$, falls

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt ist. Im Allgemeinen sind Subgradienten nicht eindeutig (insbesondere, wenn f einen "Knick" hat), und man definiert

$$\partial f(x) := \{x^* \mid x^* \text{ ist Subgradient zu } f \text{ bei } x\}.$$

Die mengenwertige Abbildung $\partial f : x \mapsto \partial f(x)$ heißt *Subdifferential* von f. Zeigen Sie für alle konvexen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $f \not\equiv +\infty$:

(a) f wird bei x minimal $\iff$ $0 \in \partial f(x)$.

(b) ∂f ist *monoton* in folgendem Sinne:

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N,\ x_1^* \in \partial f(x_1),\ x_2^* \in \partial f(x_2).$$

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html

Dort können Sie sich auch **bis zum 15.04.2016 um 12 Uhr online für die Übung anmelden**.