

Variationsungleichungen

10. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 27.06.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

**Aufgabe 1 (5 Punkte):**

Es sei  $N \geq 3$  und  $\sigma_N$  die Oberfläche der Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^N$ . Wir betrachten einen Spezialfall des Funktionals aus Aufgabe 3 von Blatt 8, eingeschränkt auf radialsymmetrische, radial fallend Funktionen:

$$J(u) := \sigma_N \int_0^R (|u'|^2 - u' - au) r^{N-1} dr, \quad u \in K_R.$$

mit gegebenem  $a > 0$  (konstant). Dabei ist  $K_R$  die Menge der Funktionen  $v : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetig auf  $(0, R]$  sind mit  $v(R) = 0$ , sowie schwach differenzierbar auf  $(0, R)$ , mit schwacher Ableitung  $v' \leq 0$ , und  $\|v\|^2 := \sigma_N \int_0^R (v(r)^2 + v'(r)^2) r^{N-1} dr < \infty$ .

- (a) Wie sieht die Variationsungleichung für einen Minimierer  $u \in K$  von  $J$  aus?
- (b) Angenommen, es gibt ein  $r_0 > 0$  und einen Minimierer  $u \in C^1([0, R])$  mit  $u' = 0$  auf  $[0, r_0]$  und  $u' < 0$  auf  $(r_0, R)$ . Bestimmen Sie  $u$  und  $r_0$  explizit. Welche Differentialgleichung erfüllt  $u$  für  $r > r_0$ ?
- (c) Sei nun  $S \geq 0$  die größtmögliche Konstante, so dass

$$\int_0^S -w'(r)r^{N-1} dr \geq a \int_0^S w(r)r^{N-1} dr \quad \text{für alle } w \in K_S$$

Zeigen Sie: Ist  $S \geq R$ , so ist  $u = 0$  der einzige Minimierer.

**Bemerkung:** Über  $w(x) := v(|x|)$ ,  $x \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ , erhält man aus den Funktionen  $v \in K$  alle radialsymmetrischen, radial fallenden Funktionen  $w \in H_0^1(B_R(0))$ , und  $\|w\|_{H^1(B_R(0))} = \|v\|$ . Für  $a = 1$  ist die Konstante  $S$  oben diejenige Zahl, für die Volumen und Oberfläche der Kugel mit Radius  $S$  im  $\mathbb{R}^N$  übereinstimmen:  $S = N$ ; im Allgemeinen  $S = \frac{N}{a}$ .

**Aufgabe 2 (5 Punkte):**

Es sei  $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ , und

$$K := \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega\},$$

was eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von  $H^1(\Omega)$  ist. Ferner sei  $f_0 \in L^2(\Omega)$  mit  $\int_\Omega f_0 dx < 0$ . Zeigen Sie, dass die Variationsungleichung

$$\int_\Omega u_{x_i}(v - u)_{x_i} dx \geq \int_\Omega f_0(v - u) dx \quad \text{für alle } v \in K.$$

eine Lösung  $u \in K$  besitzt.

**Aufgabe 3 (10 Punkte):** Wir betrachten das Hindernisproblem

$$\text{Minimiere für } v \in K: \int_{\Omega} |\nabla v|^2, \quad \text{mit } K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ in } \Omega\}.$$

Hierbei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, das sternförmig bezüglich des Ursprungs ist (insbesondere  $0 \in \Omega$ ), und  $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$  mit  $\psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ ,  $\psi(0) > 0$  und  $x \cdot \nabla \psi(x) \leq 0$  für alle  $x \in \Omega$ . Sei nun  $u \in K$  eine Lösung (Minimierer) des Hindernisproblems mit  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ .

Zeigen Sie:

(a)  $x \cdot \nabla v(x) \leq 0$  für alle  $x \in \partial\Omega$  und  $v \in K \cap C^1(\bar{\Omega})$  mit  $v \geq 0$  in  $\Omega$ .

(b)  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

Hinweis: Die Lösung des Hindernisproblems ist eindeutig.

(c) Ist  $u(x_0) = \psi(x_0)$  für ein  $x_0 \in \Omega$ , so gilt auch  $\nabla u(x_0) = \nabla \psi(x_0)$ .

(d)  $x \cdot \nabla u(x) \leq 0$  für alle  $x \in \Omega$ .

Hinweis:

Da sowohl  $u$  als auch  $\psi$  in  $C(\bar{\Omega})$  liegen, besteht die Nichtkoinzidenzmenge „ $\{u > \psi\}$ “ aus allen  $x$ , für die  $u(x) > \psi(x)$  im gewöhnlichen Sinne gilt, und ihr Komplement ist damit tatsächlich (und nicht nur formal)  $I = \{x \mid u(x) = \psi(x)\}$ . Welche Differentialgleichung erfüllt  $u$  in  $\{u > \psi\}$ , und was folgt daraus für  $\Delta(x \cdot \nabla u)$ ? Sie können hier annehmen, dass  $u$  in  $\{u > \psi\}$  beliebig oft differenzierbar ist.

(e) Wo nimmt  $u$  sein Maximum an? Was kann man über die Gestalt der Mengen  $\{x \mid u(x) \geq c\}$ ,  $c > 0$ , sagen?

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html>