Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2016**
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

Variationsungleichungen
12. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 11.07.2016, 10 Uhr
(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten Newtons Funktional des Strömungswiderstands eines Körpers mit Profil u in dünnen Medien:

$$R(u) := \int_\Omega \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}\, dx$$

Die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung in starker Form für glatte kritische Punkte u lautet

$$0 = 2\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^2}\right) = a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j} \quad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

(Diese Gleichung erhält man nur, wenn man das Funktional *nicht* auf konkave oder beschränkte Funktionen einschränkt!) Zeigen Sie:

(a) $a_{ij}(\xi) = \frac{2}{(1+|\xi|^2)^2}\delta_{ij} - \frac{8\xi_i\xi_j}{(1+|\xi|^2)^3}$ für $\xi \in \mathbb{R}^N$, wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

(b) Der *quasilineare Differentialoperator zweiter Ordnung* $u \mapsto a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j}$ heißt *(lokal) elliptisch bei einem* $\xi \in \mathbb{R}^N$, wenn die Matrix $A(\xi) := (a_{ij}(\xi))_{ij}$ positiv definit oder negativ definit ist. Für welche Werte von ξ ist dies der Fall, und wann ist $A(\xi)$ indefinit?
<u>Hinweis</u>: Für $\xi \neq 0$ sind ξ und alle Vektoren senkrecht zu ξ Eigenvektoren von $A(\xi)$.

<u>Bemerkung</u>: Wäre $A(\xi)$ durchgehend negativ definit oder durchgehend positiv definit, würde man den Differentialoperator als elliptisch bezeichnen. Hier handelt es sich um einen Operator wechselnden Typs. Die Funktion im Integranden von R, $\xi \mapsto g(\xi) := \frac{1}{1+|\xi|^2}$, erfüllt $D^2 g(\xi) = -A(\xi)$, was lokale Konvexität von g mit der Elliptizität des Differentialoperators verknüpft.

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Es sei $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $M > 0$ eine Konstante. Man kann zeigen, dass

$$R(v) := \int_B \frac{1}{1 + |\nabla v|^2}\, dx, \quad v \in K := \{v : B \to \mathbb{R} \mid v \text{ konkav}, 0 \leq v \leq M\}$$

einen Minimierer u in $K \subset W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(B)$ hat. Wir wollen zeigen, dass u nicht radialsymmetrisch sein kann. Angenommen, dies ist doch der Fall. Führen Sie die Annahme in folgenden Schritten zum Widerspruch:

(a) Ist $\varphi \in C_0^\infty(B)$ eine Funktion mit $u+t\varphi \in K$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem Betrag, so gilt

$$0 \le \frac{d^2}{dt^2} R(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \int_B \frac{2}{(1+|\nabla u|^2)^3} \left[-(1+|\nabla u|^2)\,|\nabla \varphi|^2 + 4(\nabla u \cdot \nabla \varphi)^2\right] \, dx.$$

(b) Transformieren Sie das Integral in (a) in Polarkoordinaten $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$, mit $u = u(r)$ und dem Ansatz $\varphi_k(r,\theta) := \eta(r)\sin(k\theta)$, $r \in (0,1)$, $\theta \in [0,2\pi)$. Zeigen Sie, dass für $\eta \in C_0^\infty((0,1)) \setminus \{0\}$ das Vorzeichen des Integrals negativ wird, zumindest für große $k \in \mathbb{N}$.
<u>Hinweis</u>: $\int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(k\theta)\, d\theta = C_1 > 0$, mit C_1 unabhängig von $k \in \mathbb{N}$.
<u>Bemerkung</u>: Dies liefert noch nicht den gewünschten Widerspruch zu (a), da wir momentan noch nicht wissen, ob überhaupt ein φ_k im Sinne von (a) zulässig ist. Dies zu zeigen ist das Ziel von (c) und (d).

(c) Ist u nicht konstant, so gibt es ein $r_0 \in [0,1)$ mit $u'(r) \le -1$ für fast alle $r > r_0$.

(d) Ist u in einem Intervall $[a,b] \subset [r_0,1]$ zweimal stetig differenzierbar mit $u''(r) < 0$ für alle $r \in [a,b]$, so ist $D^2u(x)$ (Hessematrix bezüglich der Standardkoordinaten) negativ definit auf der kompakten Menge $\{x : |x| \in [a,b]\}$. Daraus folgt, dass ein $\varepsilon = \varepsilon(k,\eta) > 0$ existiert, so dass $D^2(u+t\varphi_k)(x) = D^2u(x) + tD^2\varphi_k(x)$ negativ definit ist für alle $|t| < \varepsilon$. Insbesondere bleibt $u + t\varphi_k$ auf B konkav und damit in K, sofern der Träger von η in $[a,b]$ liegt und t klein genug ist.
<u>Bemerkung</u>: Man kann den Minimierer in der Klasse der radialsymmetrischen Funktionen explizit berechen, was wir uns hier sparen. Es zeigt sich, dass dieser tatsächlich $u'' < 0$ auf $(r_0, 1)$ erfüllt, womit die Annahme in (d) gerechtfertigt ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Es sei $u \in H_0^1((-1,1))$ gegeben durch $u(x) := \min\{3x+3, -(x+1)^2+4\}$. Skizzieren Sie u, und zeigen Sie dann:

(a) Für alle $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ gilt

$$\int_{(-1,1)} u'\varphi' \, dx = 5\varphi(0) + 2\int_0^1 \varphi(x)\, dx$$

Insbesondere folgt $\int u'\varphi' \, dx \ge 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(-1,1)$ mit $\varphi \ge 0$, und laut Vorlesung existiert ein nichtnegatives Radon-Maß μ mit $-u'' = \mu$ im Distributionssinne, also

$$\int_{(-1,1)} u'\varphi' \, dx = \int_{(-1,1)} \varphi(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((-1,1)).$$

(b) Geben Sie μ explizit an. Ist μ absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes λ, gilt also $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ für alle messbaren Mengen A?

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html