Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2016

Variationsungleichungen

4. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 09.05.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Es sei $\eta \in C(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit

$$\eta \geq 0, \quad \eta(x) = 0 \text{ für alle } |x| \geq 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\, dx = 1.$$

Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$ und $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$:

(a) $|(\eta * u)(x)|^p \leq (\eta * (|u|^p))(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.
Hinweis: Höldersche Ungleichung.

(b) Die reskalierte Funktion $\eta_m(x) := m^N \eta(mx)$ erfüllt $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_m(x)\, dx = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und $\eta_m(x) = 0$ für alle $|x| \geq \frac{1}{m}$.

(c) Ist $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger, so gilt $u * \eta_m \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$; genauer gesagt haben wir folgendes:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u * \eta_m - u|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|^p \, \eta_m(y)\, dy\, dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-messbare Menge mit endlichem Maß. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge U und eine kompakte Menge K mit $K \subset A \subset U \subset \mathbb{R}^N$, so dass

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon,$$

wobei μ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^N$ ist. Benutzen Sie diese maßtheoretische Tatsache, um folgendes zu zeigen:

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Funktion $u \in C(\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger, so dass

$$0 \leq u \leq 1 \text{ in } \mathbb{R}^N \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - \mathbb{1}_A(x)|\, dx \leq \delta,$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die *charakteristische Funktion* von A ist, d.h.,

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Hinweis: Sei B, $K \subset B \subset U$, die Menge der Punkte in U, deren Abstand zu K kleiner ist als $\frac{d}{2}$, wobei $d > 0$ der minimale Abstand von K zu ∂U ist. Glättet man nun $\mathbb{1}_B$ durch Faltung mit η_m (die Funktion aus Aufgabe 1), erhält man einen Kandidaten für u, mit $u = 1$ in K und $u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus U$, sofern ε (und damit K, U, B) sowie m in Abhängigkeit von δ geeignet gewählt werden.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit glattem Rand (C^1 genügt). Zeigen Sie:

(a) Aus dem Satz von Gauß folgt: Für alle $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Phi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$\int_\Omega (\nabla\psi) \cdot \Phi + \psi \operatorname{div} \Phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi\Phi \cdot n \, d\sigma,$$

wobei $\cdot$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$, $\int_{\partial\Omega} \ldots \, d\sigma$ das Flächenintegral und $n = n(x)$ der äußere Normalenvektor zu $\partial\Omega$ an der Stelle $x \in \partial\Omega$ ist.

(b) Existiert eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ von

$$\Delta u = f \ \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \ \text{ auf } \partial\Omega,$$

mit einem $f \in C(\bar{\Omega})$ und einem $g \in C(\partial\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma.$$

(c) Für alle $\psi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und alle $\Phi \in H^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ (d.h. Φ ist eine Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^N$, und jede der N Komponenten von Φ ist eine Funktion in $H^{1,2}(\Omega)$) gilt

$$\int_\Omega (\nabla\psi) \cdot \Phi + \psi \operatorname{div} \Phi \, dx = 0.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \int_\Omega (|u| + \sum_{i=1}^N |\partial_i u|) \, dx < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $u^+ \in W^{1,1}(\Omega)$, wobei $u^+(x) := h(u(x))$, mit $h(s) := \max\{0, s\}$. Ferner hat u^+ die schwachen Ableitungen

$$\partial_i u^+(x) = v_i(x) := \begin{cases} \partial_i u(x) & \text{für f.a. } x \text{ mit } u(x) > 0, \\ 0 & \text{für f.a. } x \text{ mit } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie dazu folgende Zwischenschritte:

(a) Es gibt eine Folge von Funktionen $h_n \in C^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_n(s) = 0$ für $s \leq 0$, $0 \leq h_n' \leq 1$, und $h_n'(s) = h'(s)$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{2}{n}]$.

(b) $h_n \to h$ gleichmäßig in $\mathbb{R}$.

(c) Mit $S_n := \{x \in \Omega \mid 0 \leq u(x) \leq \frac{2}{n}\}$ gilt $\int_{S_n} (|u| + \sum_{i=1}^N |\partial_i u|) \, dx \to 0$.

(d) $h_n \circ u \in W^{1,1}(\Omega)$, $h_n \circ u \to u$ in L^1 und $\partial_i(h_n \circ u) \to v_i$ in L^1.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html