Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2016**
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

Variationsungleichungen
5. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 23.05.2016, 10 Uhr
(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Es sei $1 \le p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit

$$\eta \ge 0, \quad \eta(x) = 0 \ \text{ für alle } |x| \ge 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\,dx = 1.$$

Ferner sei $\eta_m(x) := m^N \eta(mx)$.

(a) Zeigen Sie, dass $u * \eta_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$, mit $\partial_i(u * \eta_m) = (\partial_i u) * \eta_m$, $i = 1, \dots, N$.

(b) Mit Hilfe der Resultate der Aufgaben 1 und 2 von Blatt 4 kann man sich überlegen, dass

$$\|v * \eta_m - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für alle } v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\|u * \eta_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei $\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} := \big(\int_{\mathbb{R}^N} |w|^p \ dx + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i w|^p \ dx \big)^{\frac{1}{p}}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Es sei $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$. Für $N \ge 2$ gilt die auf den ersten Blick verwunderliche Ungleichung

$$-1 \ge 0 \ \text{ auf } E := \{0\} \text{ im Sinne von } H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie dies für $N \ge 3$, mit Hilfe der Funktionenfolge

$$u_n(x) := \min\{0, -1 + |nx|^{-\alpha}\}$$

mit einem geeigneten $\alpha > 0$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass u_n für $\alpha < N - 1$ schwach differenzierbar ist (vgl. Aufgabe 2 auf Blatt 3), mit

$$\partial_i u_n(x) = \begin{cases} -\alpha n^{-\alpha} \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} & \text{für } |nx|^{-\alpha} < 1, \\ 0 & \text{für } |nx|^{-\alpha} > 1. \end{cases}$$

Wann gilt $u_n \to -1$ in $H^1(B_1(0)) = W^{1,2}(B_1(0))$?

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html