Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2016

Variationsungleichungen
6. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 30.05.2016, 10 Uhr
(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)$. Wir betrachten die Variationsungleichung

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \text{für alle } v \in K := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ in } \Omega\}. \tag{1}$$

Sei nun $u \in H^2(\Omega) \cap K$. Zeigen Sie, dass u genau dann Lösung von (1) ist, wenn

$$-\Delta u - f \geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad \text{und} \quad -(\Delta u + f)(u-\psi) = 0 \;\text{ f.ü. in } \Omega. \tag{2}$$

Hinweis zu „$\Rightarrow$“: Verwenden Sie folgende Variante des Fundamentallemmas der Variationsrechnung: Für jedes $w \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega w\varphi\,dx \geq 0 \;\text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \Longrightarrow \quad w \geq 0 \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ mit $\varphi^1 \geq \varphi^2$ in Ω, wobei $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2) := \{v = (v^1, v^2) \mid v^1, v^2 \in H^1(\Omega)\}$ Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts $(u,v) := (u^1,v^1)_{H^1(\Omega)} + (u^2,v^2)_{H^1(\Omega)}$ ist. Ferner sei

$$K := \left\{v = (v^1,v^2) \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \;\middle|\; v^1 \geq v^2 \text{ in } \Omega,\, v = \varphi \text{ auf } \partial\Omega\right\},$$

$f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ und

$$a(v,w) := \int_\Omega \left(v^1_{x_i} w^1_{x_i} + v^2_{x_i} w^2_{x_i}\right) dx + \int_\Omega \left(\lambda v^1 w^1 + \mu v^2 w^2\right) dx,$$

mit Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Weisen Sie unter geeigneten Voraussetzungen an λ und μ die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u \in K$ folgender Variationsungleichung nach:

$$a(u, v-u) \geq \left\langle f_1, v^1 - u^1 \right\rangle + \left\langle f_2, v^2 - u^2 \right\rangle \quad \text{für alle } v \in K.$$

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html