**Prof. Dr. B. Kawohl**
**Dr. S. Littig**
**M. Kühn, M.Sc.**

**SS 2016**

# Variationsungleichungen
## 8. Übung

**Abgabeschluss ist Montag, der 13.06.2016, 10 Uhr**
(in den Übungsbriefkasten Variationsungleichungen im Studierendenarbeitsraum)

### Aufgabe 1 (5 Punkte):

Es sei $1 \leq p < N$. Zu $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ definieren wir

$$u_\lambda(x) := \lambda^\alpha u(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ \lambda > 0,$$

mit derjenigen Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$, für die

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

(a) Berechnen Sie $\alpha = \alpha(p, N)$ explizit.

(b) Bestimmen Sie $q \in [1, \infty)$, so dass

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \quad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } u \in L^q(\mathbb{R}^N).$$

(c) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $q$ die Zahl aus (b). Finden Sie eine in $H_0^{1,p}(\Omega)$ und $L^q(\Omega)$ beschränkte Folge $(u_n)$, die in $L^q(\Omega)$ keine konvergente Teilfolge hat (z.B. weil $u_n \to 0$ punktweise f.ü. und $\liminf \|u_n\|_{L^q} > 0$).

### Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $f_0 \in L^s(\Omega)$ mit einem $s > N$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $tg(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u + g(u) = f_0$, also

$$\int_\Omega \left(u_{x_i}\varphi_{x_i} + g(u)\varphi - f_0\varphi\right) dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Zeigen Sie, dass dann $\max_\Omega |u| \leq C$ mit einer von $g$ und $u$ unabhängigen Konstanten $C \geq 0$.
<u>Hinweis</u>: Für $k > 0$ sei

$$u^{(k)} := (\operatorname{sgn} u) \max\{|u| - k, 0\}, \qquad A(k) := \{x \in \Omega \, : \, |u(x)| \geq k\}.$$

Nach der Vorlesung genügt es zu zeigen (warum?), dass

$$\left\|u^{(k)}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \int_{A(k)} f_0^2 \, dx$$

mit einer von $u$, $k$ und $g$ unabhängigen Konstanten $C_1 \geq 0$.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten das Funktional

$$J(u) := \int_\Omega \Big( |\nabla u|^2 + |\nabla u| - au \Big)\, dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

mit gegebenem $a \in L^2(\Omega)$, wobei $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$ der Vektor der schwachen Ableitungen erster Ordnung und $|\cdot|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^N$ ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $u$ ein Minimierer, so gilt die Variationsungleichung

$$\int_\Omega \big(\nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + |\nabla v| - |\nabla u| - a(v-u)\big)\, dx \geq 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

(b) $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex, und hat höchstens einen Minimierer.

(c) Die Variationsungleichung aus (a) hat höchstens eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

**Aufgabe 4 (5 Punkte):**

Es sei $\omega : [0, R] \to \mathbb{R}$ eine stetige und monoton wachsende Funktion, so dass

$$0 \leq \omega(\rho) \leq \eta\omega(4\rho) + C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha \quad \text{für alle } 0 \leq \rho \leq \frac{R}{4}, \tag{1}$$

wobei $C \geq 0$, $0 < \eta < 1$ und $0 < \alpha < \left|\frac{\log \eta}{\log 4}\right|$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass dann

$$\omega(\tilde{\rho}) \leq 2\max\{\omega(R), CK\}\left(\frac{4\tilde{\rho}}{R}\right)^\alpha \quad \text{für alle } 0 \leq \tilde{\rho} \leq \frac{R}{4} \tag{2}$$

gilt, mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$.

<u>Hinweis</u>: Zeigen Sie zunächst induktiv, dass ein $K$ existiert, so dass

$$\omega(4^{-n}\rho) \leq \eta^n\omega(\rho) + CK\left(\frac{4^{-n}\rho}{R}\right)^\alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } 0 \leq \rho \leq R. \tag{3}$$

Um die die rechte Seite von (3) weiter nach oben abzuschätzen, überlegen Sie sich dann, dass $\omega(\rho) \leq \omega(R)$, und dass für alle $\tilde{\rho} = 4^{-n}\rho \in [4^{-(n+1)}R, 4^{-n}R]$ folgende Ungleichung gilt:

$$\eta^{n+1} \leq \eta^q \leq \eta^n, \quad \text{wobei } q := \frac{\log(R/\tilde{\rho})}{\log 4}.$$

<u>Bemerkung</u>: Für die Voraussetzung (1) ist die Annahme einer oberen Schranke für $\alpha$ keine echte Einschränkung, denn gilt (1) für ein $\alpha > 0$, so auch für alle kleineren. Die Aussage (2) ist jedoch falsch im Fall $\alpha = \left|\frac{\log \eta}{\log 4}\right|$, z.B. $\omega(\rho) := \rho^\alpha(-\log \rho)$ für $0 \leq \rho \leq 1$.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1616SS/VU.html**