Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc. **WS 2016/2017**

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 31.10.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Wir betrachten die Eikonal-Gleichung

$$|u'|^2 = 1 \quad \text{in } (-1,1),$$

mit $u(-1) = u(1) = 0$. Diese lässt sich regularisieren zu

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + |u_\varepsilon'|^2 = 1 \quad \text{in } (-1,1),$$

für $\varepsilon > 0$ und mit denselben Randdaten. Wir sind an Lösungen u_ε interessiert, die achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung u_ε des regularisierten Problems. Finden Sie dazu zunächst eine Lösung v_ε von

$$\begin{aligned} -\varepsilon v_\varepsilon' + v_\varepsilon^2 &= 1 \quad \text{in } (-1,1), \\ v_\varepsilon(0) &= 0, \end{aligned}$$

und schließen dann von v_ε auf u_ε.
Zur Kontrolle: $u_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log\left(\frac{\cosh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{u_\varepsilon\}$ in $[-1,1]$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $u(x) := 1 - |x|$ konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $\Gamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|x_2 = 0\}$. Lösen Sie mit dem charakteristischen Verfahren:

$$\begin{aligned} u_{x_2} + c u_{x_1} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(x_1,x_2) &= g(x_1) \quad \text{in } \Gamma, \end{aligned}$$

mit gegebenem $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ und $u_0(x_1, x_2) = x_1^2$. Lösen Sie das quasilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 \\ u(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma \end{cases}$$

in einer Umgebung von Γ.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Lösen Sie mit dem charakteristischen Verfahren:

(a)

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u \\ u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2), \end{cases}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben sei.

(b)

$$\begin{cases} (x_2 + u) u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = x_1 - x_2 \\ u(x_1, 1) = 1 + x_1. \end{cases}$$

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html