Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

10. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 16.1.2017, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Im Kontext von Blatt 9 Aufgabe 4 gilt folgende Variante des Prinzips der dynamischen Programmierung:

$$u(z) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} \left\{ \int_0^h e^{-\lambda s} r(x(s), \alpha(s))\, ds + e^{-\lambda h} u(x(h)) \right\}.$$

Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathcal{A} := \{\alpha : [0, \infty) \to A \mid \alpha(\cdot) \text{ ist messbar}\}$ die Menge aller Steuerungen. Zu einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und einem Anfangszeitpunkt $0 < t \leq T$ betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}^*(s) = f(x^*(s), \alpha^*(s)) & (t < s < T), \\ x^*(t) = x, \end{cases}$$

wobei zu jedem Zeitpunkt s, $\alpha^*(s) \in A$ so gewählt wird, dass

$$f(x^*(s), \alpha^*(s)) \cdot Du(x^*(s), s) + r(x^*(s), \alpha^*(s)) = \min_{a\in A} \{f(x^*(s), a) \cdot Du(x^*(s), s) + r(x^*(s), a)\}$$

gilt. Dabei ist

$$u(x,t) := \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} C_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} \left\{ \int_t^T r(x(s), \alpha(s))\mathrm{d}s + g(x(T)) \right\}.$$

Zeigen Sie

$$u(x,t) = C_{x,t}[\alpha^*(.)],$$

sofern u und $\alpha^*(\cdot)$ hinreichend glatt sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien $p, q \in C^1(\mathbb{R})$ mit $p', q' > 0$. Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{cases} u^1_t - q(u^2)_x = 0, \\ u^2_t - p(u^1)_x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ strikt hyperbolisch ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass das System

$$(1) \qquad \begin{cases} h_t + q_x = 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{h^2}{2}\right)_x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ strikt hyperbolisch ist, falls $h > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich das System (1) für eine glatte Lösung $(h, q) = (h, vh)$ mit $h > 0$ in das System

$$(2) \qquad \begin{cases} h_t + (vh)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v^2}{2} + h\right)_x = 0 \end{cases}$$

umschreiben lässt. Zeigen Sie außerdem, dass das System (2) strikt hyperbolisch ist.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html