Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

11. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 23.1.2017, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Wir betrachten das lineare System von Erhaltungsgleichungen

$$u_t + Au_x = 0$$

für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei strikt hyperbolisch, das heißt die Eigenwerte seien alle reell und verschieden.

Berechnen Sie zu einem gegebenen glatten Anfangswert $u(x,0) = g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ die Lösung. In welchem Zusammenhang stehen die Eigenwerte von A und das Evolutionsverhalten der Lösung?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Koordinaten von u bezüglich der Basis aus (rechtsseitigen) Eigenvektoren $r_1, \dots, r_n$ von A.

Aufgabe 2 (7 Punkte):

Für $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, definieren wir die Matrixfunktion

$$B(z) := e^{-\frac{1}{z^2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{2}{z}) & \sin(\frac{2}{z}) \\ \sin(\frac{2}{z}) & -\cos(\frac{2}{z}) \end{pmatrix},$$

und setzen $B(0) = 0$. Zeigen Sie, dass B in C^∞ liegt und reelle Eigenwerte hat, es aber keine Rechtseigenvektoren $\{r_1(z), r_2(z)\}$ mit $|r_1(z)| = |r_2(z)| = 1$ gibt, die nahe 0 stetig von z abhängen. Was geschieht mit den Eigenräumen für $z \to 0$?

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Wir betrachten die Eulerschen Gleichungen für kompressible Gasdynamik in einer Dimension

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Dabei bezeichnet ρ die Massendichte, v die Geschwindigkeit und E die Energiedichte pro Masseneinheit. Wir nehmen an, dass sich die Energiedichte zusammensetzt aus

$$E = e + \frac{v^2}{2},$$

mit innerer Energie e und kinetischer Energie $\frac{v^2}{2}$. Weiter nehmen wir an, dass der Druck p eine bekannte Funktion

$$p = p(\rho, e)$$

ist. Zeigen Sie, dass das System (1) strikt hyperbolisch ist, falls $p > 0$ und

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial e} > 0$$

gelten.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html