Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

12. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 30.1.2017, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Ausdünnungskurven R_1, R_2 des Systems

$$\begin{cases} h_t + (vh)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v^2}{2} + h\right)_x = 0 \end{cases}$$

in der (h, v)-Ebene durch

$$2\sqrt{h} \pm v = c,$$

mit einer Konstante c, gegeben sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Wir betrachten das System

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{h^2}{2}\right)_x = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Finden Sie eine Formel für die Schockmenge $S(z_0)$ in der (h, q)-Ebene für $z_0 = (h_0, q_0)$ und $h_0 > 0$. Zeigen Sie außerdem, dass die Schockmenge im Spezialfall $q_0 = 0$ durch den Ausdruck

$$q = \pm \frac{(h - h_0)h}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Zu $c > 0$ betrachten wir die lineare Wellengleichung

$$\varphi_{tt} = c^2 \varphi_{xx}$$

mit den Anfangsdaten $\varphi(x, 0) = f(x)$ und $\varphi_t(x, 0) = g(x)$ für gegebene Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, indem Sie das Problem zunächst in ein lineares hyperbolisches Erhaltungsproblem erster Ordnung wie in Aufgabe 1 vom 10. Übungsblatt umschreiben.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html