Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

2. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 7.11.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sind $\alpha : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$, $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene, hinreichend glatte Funktionen, so haben die quasilinearen Gleichungen

$$b(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

und

$$b_\alpha(x, u(x)) \cdot Du(x) + c_\alpha(x, u(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

wobei

$$b_\alpha(x, z) := \alpha(x) b(x, z) \text{ und } c_\alpha(x, z) := \alpha(x) c(x, z),$$

offensichtlich die gleichen Lösungen u. Wie spiegelt sich das in den zu (1) und (2) gehörigen charakteristischen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen wider (in denen mit Hilfe der quasilinearen Struktur p eliminiert wurde)? Die Lösungsfunktionen (x, z) und (x_α, z_α) davon sind zwar nicht mehr paarweise gleich, aber es gibt eine natürliche bijektive Beziehung zwischen ihnen. Welche ist das?
Hinweis: Verwenden Sie die eindeutig bestimmte (warum?) Lösung t von

$$\frac{dt(s)}{ds} = \alpha(x(t(s))), \quad t(0) = 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei $\Gamma := \partial B(0,1)$ die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten für $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} -x_2 u_{x_1} + x_1 u_{x_2} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $g = c$ auf Γ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, so hat (3) unendlich viele Lösungen.
Hinweis: Wie sehen die Charakteristiken von (3) aus?

(b) Ist y ein Punkt in Γ und U eine offene Umgebung von y im $\mathbb{R}^2$, so dass $\Gamma \cap U$ zusammenhängend und g auf $\Gamma \cap U$ nicht konstant ist, so hat (3) keine Lösung in U.

(c) Wieso widerspricht (b) nicht dem Satz über die lokale Existenz von Lösungen aus der Vorlesung?

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei $\Gamma = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, und $a_1, a_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschränkte C^∞-Funktionen. Wir betrachten das lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

mit $u_0 \in \mathbb{C}^\infty(\Gamma)$. Ferner gelte $a_2 \neq 0$ auf Γ.

(a) Zeigen Sie, dass eine Lösung u in einer Umgebung von Γ existiert.

(b) Finden Sie ein Beispiel für a_1, a_2 und u_0, so dass *keine* globale C^1-Lösung u (also auf ganz $\mathbb{R}^2$) existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4}$$

Zeigen sie: Gilt

$$1 + tg'(x - tF'(u))F''(u) \neq 0$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit gegebenen $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$, so ist durch

$$u(x, t) = g(x - tF'(u))$$

eine Funktion $u(x, t)$ eindeutig (implizit) definiert und eine klassische Lösung zu (4).

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html