Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2016/2017**
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

3. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 14.11.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Es sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(q, x) := \Psi(x) f(|q|) - \Phi(x),$$

wobei $f \in C^2([0, \infty))$ mit $f'(0) = 0$ und $f'' \geq \delta > 0$ auf $[0, \infty)$ für eine Konstante δ, sowie $\Phi, \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \Psi \leq \frac{1}{\delta}$ in $\mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für den Minimierer x^* von

$$\int_0^T L(\dot{x}(t), x(t))\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(T) = x_T$$

(unter allen C^2-Funktionen $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ mit gegebenem $T > 0$ und $x_T \in \mathbb{R}^n$).

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $q \mapsto D_q L(q, x)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, für jedes x bijektiv ist, und bestimmen Sie eine explizite Formel für die zur Lagrange-Funktion L gehörige Hamilton-Funktion H.

(c) Sei nun $\Phi \geq 0$ und $f(r) = r^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$ fest). Geben Sie H für diesen Spezialfall an, und zeigen Sie damit, dass es eine Konstante C gibt, die nur von $\dot{x}^*(0)$, $\Phi(x^*(0))$, k und δ abhängt, so dass $|\dot{x}^*| \leq C$ auf $[0, T]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $f \in C(\Omega)$. Zeigen sie die folgenden Aussagen.

(a) Gilt

$$\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

so ist $f = 0$ in Ω.

(b) Gilt

$$\int_\Omega f v_{x_i} \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n,$$

so ist $f = c$ in Ω mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei $L = H^*$ die Legendre-Transformation zu H, falls $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(a) Sei $H(p) = \frac{1}{r} |p|^r$ für $1 < r < \infty$. Zeigen Sie

$$L(q) = \frac{1}{s} |q|^s, \quad \text{wobei } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

(b) Sei $H(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^{n} b_i p_i$, wobei $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. Berechnen Sie $L(q)$.

Melden Sie sich bitte auch bei KLIPS für diese Veranstaltung an.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html