Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
4. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 21.11.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Man sagt q gehört zum Subdifferential von H in p, geschrieben

$$q \in \partial H(p),$$

falls

$$H(r) \geq H(p) + q \cdot (r - p) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

$$q \in \partial H(p) \quad \Longleftrightarrow \quad p \in \partial L(q) \quad \Longleftrightarrow \quad p \cdot q = H(p) + L(q),$$

wobei $L = H^*$.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $L = H^*$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, und u gegeben durch die Hopf-Lax Formel

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Wird das Minimum in y^* angenommen, gilt also $u(x,t) = tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + g(y^*)$, so folgt

$$Dg(y^*) \in \partial L(q^*), \quad \text{mit } q^* := \frac{x-y^*}{t}.$$

Sie dürfen dabei zur Vereinfachung annehmen, dass L bei q^* differenzierbar ist (was aber eigentlich nicht nötig ist).

(b)

$$u(x,t) = \min_{y \in B(x,Rt)} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\},$$

mit $R := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{q \in \partial H(Dg(y))} |q|$ (O.B.d.A. $R < \infty$).
Hinweis: Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Normen $||.||_a$ und $||.||_b$ heißen äquivalent auf X, falls es Konstanten $c, C \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$c||x||_a \leq ||x||_b \leq C||x||_a$$

für alle $x \in X$. Zeigen Sie:

(a) Ist X endlich-dimensional, so sind alle Normen auf X äquivalent.

(b) Sind alle Normen auf X äquivalent, so muss X endlich-dimensional sein. Nehmen Sie dazu an, dass es zu jedem Unterraum Y von X eine Projektion auf Y gibt, man also $X = Y \oplus \operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ für geeignete e_i schreiben kann.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei $g \in C^2$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\sup_{\mathbb{R}^n} |D^2 g| < \infty$, so ist g semikonkav.

(b) g ist genau dann semikonkav, wenn die Abbildung $x \mapsto \frac{C}{2}|x|^2 - g(x)$ konvex ist, mit einer Konstante C.
Dabei dürfen Sie verwenden, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn sie $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

(c) g ist genau dann konvex, wenn $D^2 g \geq 0$, also die Hessematrix von g positiv semidefinit ist.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html