Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc. **WS 2016/2017**

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
5. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 28.11.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei E eine abgeschlossene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$. Angenommen man dürfte die Hopf-Lax Formel auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + |Du|^2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } E \times \{t=0\} \\ u = +\infty & \text{auf } (\mathbb{R}^n \setminus E) \times \{t=0\} \end{cases}$$

anwenden. Zeigen Sie, dass man dann

$$u(x,t) = \frac{1}{4t}\operatorname{dist}(x,E)^2$$

erhalten würde.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvexe Funktion der Klasse C^2, $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (global) Lipschitzstetig und u^1, u^2 die schwachen Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u^i_t + H(Du^i) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u^i = g^i & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \quad (i=1,2). \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten (in L^∞):

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left|u^1(.,t) - u^2(.,t)\right| \le \sup_{\mathbb{R}^n} \left|g^1 - g^2\right| \quad (t>0).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Funktion, die die Abschätzung

$$u(x+z,t) - 2\,u(x,t) + u(x-z,t) \le C\left(1 + \tfrac{1}{t}\right)|z|^2$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ und fast alle $x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0$ erfüllt. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ der Standardglätter in der x- und der t-Variable. Dieser hat im wesentlichen folgende Eigenschaften:

(1) $\eta_\varepsilon \ge 0$,

(2) $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

(3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 1$.

Zeigen Sie für $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, dass die folgenden Abschätzungen gelten.

(a) $|\mathrm{D}u^\varepsilon| \le \mathrm{Lip}(u)$, wobei $\mathrm{Lip}(u)$ die Lipschitzkonstante von u bezeichne,

(b) $\mathrm{D}^2 u^\varepsilon \le C'\left(1 + \frac{1}{t}\right)\mathrm{I}$ für alle $t \ge 2\varepsilon$, mit einer von ε unabhängigen Konstante $C' \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Der effektive Defititionsbereich $\mathrm{dom}(f)$ von f ist definiert als

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; f(x) < \infty\}\,.$$

Zeigen Sie, dass f auf dem Inneren seines effektiven Definitionsbereiches stetig ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Ist u ein Punkt des Inneren von $\mathrm{dom}(f)$, so ist f in einer Umgebung von u nach oben beschränkt.

(b) Ist f in einer Umgebung eines Punktes u nach oben beschränkt, so ist f bereits stetig bei u. Betrachten Sie dazu ohne Einschränkung den Fall $u = 0$ und $f(u) = 0$.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html