Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 12.12.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (7 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Entropielösungen u_1 und u_2 der Burgers-Gleichung

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 \tag{1}$$

auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ zu den Anfangswerten

$$u_1(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ -1 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$

(b) Multipliziert man die Burgers-Gleichung (1) mit u, so ergibt sich, dass u formal die Gleichung

$$\frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{3}(u^3)_x = 0 \tag{2}$$

löst. Leiten Sie die Rankine-Hugoniot-Bedingung für Integrallösungen von (2) (d. h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \frac{1}{2}(u^2)\varphi_t + \frac{1}{3}(u^3)\varphi_x \; dt \; dx + \int_{-\infty}^{\infty} u(\cdot,0)\varphi \; dx = 0$), her. Überprüfen Sie anhand dessen, ob die Lösungen u_1 und u_2 Integrallösungen von (2) sein können.

(c) Bestimmen Sie zu dem Anfangswert $u_2(\cdot,0)$ die Integrallösung von (2) oder zeigen Sie, dass zu dem gegebenen Anfangswert keine Integrallösung von (2) existiert. Betrachten Sie hierzu zunächst die Funktion $v = \frac{1}{2}u^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F(0) = 0$, und u eine stetige Integrallösung von

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \qquad\quad u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

die für jedes $T > 0$ in $\mathbb{R} \times [0,T]$ kompakten Träger hat (d.h. zu jedem $T > 0$ existiert $C_T \in \mathbb{R}$ mit $\sup\{|x| : u(x,t) \neq 0 \text{ für ein } t \in [0,T]\} \leq C_T$). Zeigen Sie, dass dann „Massenerhaltung“ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \quad \text{für alle } t > 0.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte):

Wir suchen die Entropielösung von

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -1, \\ 0 & \text{für} \quad -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung explizit für $0 < t < 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung explizit für $1 \leq t < 2$.
Hinweis: Die Lösungskurve $\{(x(t), t) | t > 1\}$ von

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2}\frac{x(t)}{t}, \quad x(1) = 2,$$

spielt eine Rolle für die Rankine-Hugoniot-Bedingung – wieso?

(c) Bei $t = 2$ ändert sich bei der Entropielösung u wieder eine Sprunglinie, die nun zur Kurve $\{(x(t), t) | t > 2\}$ wird, wobei $x(t)$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x(t)}{t}, \quad x(2) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $T > 2$ gibt, so dass diese Kurve bei $t = T$ auf die aus (b) trifft. Was bedeutet das für die Entropielösung u für $t > T$?

Am Freitag, den 09.12.2016 um 16 Uhr, findet im Hörsaal des Mathematischen Instituts eine Adventsvorlesung statt. Alle Interessierten sind herzlich eingeladen.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html