Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

8. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 19.12.2016, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Verwenden Sie die Lax-Oleinik-Formel um eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t + (au+b)u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

zu bestimmen.

(Wir kennen im Prinzip die Lösung, da es sich um einen Fall des in der Vorlesung behandelten Riemann-Problems handelt. In der Aufgabe geht es darum, dies mittels direkter Auswertung der Lax-Oleinik-Formel zu lösen, auch wenn es evtl. anders einfacher wäre.)

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $T > 0$, $w : \mathbb{R}^n \times (0, T] \to \mathbb{R}$ stetig, und w habe ein striktes lokales Maximum im Punkt (x_0, T) für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\tilde{w}(x,t) := w(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T).$$

Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ klein genug nimmt $\tilde{w}$ ein lokales Maximum in einem Punkt $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ mit $0 < t_\varepsilon < T$ an, und man kann diese lokale Maximalstelle so wählen, dass $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, T)$ für $\varepsilon \to 0$.

Bemerkung: In der Vorlesung wird diese Aussage benötigt für $w = u - v$, mit einer Viskositätslösung u der Hamilton-Jacobi-Gleichung und einer glatten Testfunktion v.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ Viskositätslösungen der Hamilton-Jacobi Gleichungen

$$u_t^k + H(Du^k, x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$(k = 1, \dots)$ und die Folge der u^k konvergiere gleichmäßig gegen ein u. Sei weiterhin H stetig. Zeigen sie, dass u eine Viskositätslösung von

$$u_t + H(Du, x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

ist, also dass der gleichmäßige Limes von Viskositätslösungen wieder eine Viskositätslösung ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Wir betrachten die Eikonal-Gleichung

$$|u'| = 1 \qquad \text{in } (-1, 1), \tag{1}$$

mit $u(-1) = u(1) = 0$. Diese lässt sich wiederum umschreiben zu

$$-|u'| = -1 \qquad \text{in } (-1, 1). \tag{2}$$

Finden Sie durch jeweiliges Addieren des Viskositätsterms $-\varepsilon u''$ die Lösungen der regularisierten Probleme zu (1) und (2) und untersuchen den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. Haben (1) und (2) dieselben Lösungen? Weisen Sie nach, dass es sich um Viskositätslösungen handelt.

Hinweis: Sie dürfen Blatt 1, Aufgabe 1 verwenden.

Am Mittwoch, den 14.12.2016 ab 18 Uhr, findet im Asta Café die Weihnachtsfeier der Fachschaft Mathematik statt. Alle Studierenden sind herzlich eingeladen.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html