Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

WS 2016/2017

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
9. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 9.1.2017, 10 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Nichtlineare partielle Differentialgleichungen" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u := \operatorname{dist}(x, \partial U)$. Zeigen Sie, dass u Lipschitz-stetig und eine Viskositätslösung der Eikonal-Gleichung

$$|Du| = 1 \qquad \text{in } U$$

ist. Letzteres bedeutet, dass jede Funktion $v \in C^\infty(U)$, für die $u - v$ ein Maximum (Minimum) im Punkt $x_0 \in U$ hat, die Ungleichung $|Dv(x_0)| \leq 1$ (≥ 1) erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Seien u^i $(i = 1, 2)$ Viskositätslösungen von

$$\begin{cases} u^i_t + H(Du^i, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u^i = g^i & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei H die Abschätzungen

$$\begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq C\,|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq C\,|x - y|\,(1 + |p|) \end{cases}$$

für $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $C \geq 0$ erfülle. Zeigen Sie, dass die Kontraktionseigenschaft

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left|u^1(.,t) - u^2(.,t)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} \left|g^1 - g^2\right|$$

für $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Der Stern von Bethlehem startet in einem Punkt $(x_1, 0)$ auf der positiven x_1-Achse und bewegt sich mit Geschwindigkeit $b_1 > 0$ nach rechts. Die drei Könige starten im Punkt $(0, x_2)$ auf der positiven x_2-Achse und verfolgen den Stern, wandern also mit Geschwindigkeit $b_2 > b_1$ immer auf ihn zu. Finden Sie die partielle Differentialgleichung, die von der Funktion

$$u(x_1, x_2) := \text{Zeit, die die drei Könige benötigen um den Stern von Bethlehem einzuholen}$$

gelöst wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lipschitz-stetig. Weiter erfülle $r : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$|r(x,a)| \leq C, \quad |r(x,a) - r(y,a)| \leq C\,|x-y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in A$, mit einer Konstante C.

Zu $z \in \mathbb{R}^n$ und einer Steuerung aus $\mathcal{A} := \{\alpha : [0,\infty) \to A \mid \alpha(\cdot) \text{ ist messbar}\}$ bezeichne $x = x(\cdot)$ die lokal Lipschitz-stetige eindeutige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)) \qquad (s > 0) \\ x(0) = z \end{cases}$$

Wir betrachten zu gegebenem $\lambda > 0$ die modifizierte Kostenfunktion

$$C_z[\alpha(\cdot)] := \int_0^\infty e^{-\lambda s} r(x(s), \alpha(s)) \mathrm{d}s.$$

Weiter sei

$$u(z) := \inf_{\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}} C_z[\alpha(\cdot)].$$

Zeigen Sie, dass u beschränkt ist, und falls $\lambda > \operatorname{Lip} f$ gilt, zudem Lipschitz-stetig.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der Veranstaltungshomepage (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1617WS/NlPDE.html