Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis

1. Übung

Aufgabe 1 (keine Punkte):

Der Raum $\mathcal{P}_N([0,1])$ aller reellen, auf dem Intervall $[0,1]$ definierten Polynome vom Grad kleiner oder gleich N ($N \in \mathbb{N}$) bildet bekanntermaßen mit der Vektorraumaddition (für $p, q \in \mathcal{P}_N([0,1])$)

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x) \qquad (x \in [0,1])$$

und der Skalarmultiplikation (für $p \in \mathcal{P}_N([0,1]), \lambda \in \mathbb{R}$)

$$(\lambda p)(x) := \lambda p(x) \qquad (x \in [0,1])$$

einen Vektorraum. In $\mathcal{P}_N$ ist durch die Formel

$$\|p\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |p(x)| \qquad \big(p \in \mathcal{P}_N([0,1])\big)$$

eine Norm gegeben.

(a) Wie groß ist die Dimension des Polynomraumes $\mathcal{P}_N([0,1])$? Geben Sie eine Basis an.

(b) Die Abbildung $\partial : \mathcal{P}_N([0,1]) \to \mathcal{P}_N([0,1])$, die jedem Polynom p seine Ableitung zuordnet, d. h.
$$(\partial p)(x) := p'(x) \qquad (x \in [0,1]),$$
ist offensichtlich linear. Wie lautet die Darstellungsmatrix der Abbildung ∂ bezüglich der von Ihnen gewählten Basis?

(c) Es bezeichne $\mathcal{P}([0,1]) := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_N([0,1])$ den Raum aller reellen Polynome über $[0,1]$. Begründen Sie, dass dieser Raum unendlichdimensional ist, indem Sie eine entsprechende Basis angeben. Der Ableitungsoperator, den wir der Einfachheit wieder mit ∂ bezeichnen wollen, bildet $\mathcal{P}([0,1])$ nach $\mathcal{P}([0,1])$ ab. Wie sieht seine „unendlichdimensionale" Darstellungsmatix bezüglich der gefunden Basis aus?

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit Aufgabe 2.

(d) Berechnen Sie die Operatornorm der Abbildung $\partial : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1])$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Erinnerung: Ist V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung, so ist die Operatornorm $\|A\|$ von A definiert durch

$$\|A\| := \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit ihrem bisherigen Wissen zur endlichdimensionalen linearen Algebra.

Aufgabe 2 (keine Punkte):

(a) Gegeben sei eine doppelt indizierte Folge $(a_{ij})_{i,j}$ deren Folgenglieder der Eigenschaft $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$ genügen. Damit lässt sich ein linearer Operator $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$ definieren, der ein Element $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ durch

$$x \mapsto Ax = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j, \dots \right)$$

abbildet. Zeigen Sie, dass dieser Operator wohldefiniert und seine Operatornorm beschränkt ist.

(b) Sei $L : \ell^2 \to \ell^2$ der Shift-Operator, der ein Element $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ auf $Lx := (x_2, x_3, \dots)$ abbildet. Finden Sie eine Darstellung von L als unendlichdimensionale Matrix wie in (a) und zeigen Sie, dass L nicht die Summationsbedingung erfüllt, aber trotzdem wohldefiniert und seine Operatornorm beschränkt ist.

Aufgabe 3 (keine Punkte):

Sei $(e_k)_k$ die kanonische Folge von Einheitsvektoren in ℓ^2. Zeigen Sie:

(a) Die Folge der e_k hat keine konvergente Teilfolge in ℓ^2.

(b) Es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \langle e_k, a \rangle = 0$ für alle $a \in \ell^2$.

Inwiefern steht (a) im Widerspruch zu den Kompaktheitsaussagen, die Sie für endlichdimensionale Vektorräume kennen?

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html

Dort können Sie sich auch **bis zum 24.04.2017 um 12 Uhr online für die Übung anmelden**.