Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
10. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 03. 07. 2017, 12 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte):

Es sei V ein reeller (oder komplexer) Vektorraum. Eine Abbildung $p : V \to \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gilt, dass

$$p(x) \geq 0, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

Im Unterschied zu einer Norm folgt jedoch aus $p(x) = 0$ nicht notwendig dass $x = 0$.

Wir setzen $N := \{x \in V \; ; \; p(x) = 0\}$ und definieren auf V eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y \; := \; x - y \in N \, .$$

Mit $V/N := \{[x] \; ; \; x \in X\}$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

(a) Zeigen Sie: Die Menge der Äquivalenzklassen V/N trägt in kanonischer Weise eine Vektorraumstruktur. Wie sieht die Null in V/N aus? *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass N ein Unterraum ist und danach die Identität

$$[x] = x + N \, .$$

(b) Zeigen Sie: Auf V/N ist die durch $\tilde{p} : V/N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\tilde{p}([x]) := p(x)$$

gegebenen Abbildung wohldefiniert und macht V/N zu einem normierten Raum.

(c) Zeigen Sie: Ist X ein normierter Raum mit Norm $\| \cdot \|$ und U ein Unterraum, so ist auf X/U durch

$$q([x]) := \inf_{y \in [x]} \|y\|$$

eine Halbnorm definiert. Zeigen Sie außerdem: Ist U abgeschlossen, dann ist q sogar eine Norm.

Bemerkung: Man kann außerdem zeigen, dass wenn X vollständig und U abgeschlossen ist, dass dann auch X/U bezüglich der Norm q vollständig (also ein Banachraum) ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Eine Familie von Halbnormen p_n (zur Definition von Halbnorm siehe Aufgabe 1), $n \in \mathbb{N}$ heißt trennend, falls für jedes $x \in V$

$$p_n(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \implies x = 0.$$

Zeigen Sie, dass für jede trennende Familie von Halbnormen p_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

eine translationsinvariante Metrik auf V ist.
Zusatz (ohne Bewertung): Überlegen Sie sich, wie man die p_n definieren kann, um mit Hilfe der obigen Konstruktion $V := C(\Omega)$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen) zu einem vollständigen metrischen Vektorraum zu machen.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiges Gebiet. Beweisen Sie, dass für $\alpha \in (0,1)$ der Raum $C^\alpha(\overline{\Omega})$ der hölderstetigen Funktionen vollständig ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $C(\overline{\Omega})$ vollständig ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei c_0 der Raum der gegen Null konvergenten Folgen $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der Norm

$$\|(x_n)\|_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \,.$$

Sie dürfen verwenden, dass dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.

Zeigen Sie:

a) $(\ell^1)^* = \ell^\infty$

b) $(c_0)^* = \ell^1$

Die Gleichheit $X = Y$ ist dabei im Sinne von isometrischer Isomorphie zu verstehen, das heißt, dass es eine bijektive lineare Abbildung $I : Y \to X$ gibt, so dass $\|Iy\|_X = \|y\|_Y$ für jedes $y \in Y$ gilt.

Hinweis zu a): Betrachten Sie für $v = (v_n) \in \ell^\infty$ das Funktional $\ell^1 \ni (x_n) \mapsto \sum_n x_n v_n$ und weisen Sie dessen Stetigkeit nach. Umgekehrt können Sie zu jedem $f \in (\ell_1)^*$ die Folge $(v_n)_n = \big(f(e^n)\big)_n$ betrachten, wobei e^n den n-ten Einheitsvektor in ℓ^1 bezeichnet.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html