Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
Dr. M. Kühn

SS 2017

Funktionalanalysis
11. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 10. 07. 2017, 12 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei (x_n) eine Folge im Banachraum B und (f_n) eine Folge in B^*, sowie $x \in B$, $f \in B^*$. Zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, dass folgende Aussagen im Allgemeinen *nicht* gelten:

a) $(x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \rightharpoonup f) \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$,

b) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f$.

Hinweis zu b): Betrachten sie B, so dass $B^{**} \neq B$ gilt, wie z. B. in Aufgabe 4 vom 10. Übungsblatt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen $\mathcal{F} \subset C^0(X;Y) = \{f : X \to Y,\ f \text{ stetig}\}$ mit

$$\forall x \in X \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass es dann ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{x \in \overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Hinweis: Obwohl die Funktionen in $\mathcal{F}$ im Allgemeinen nicht linear sind, lässt sich auch in dieser Situation der Kerngedanke des Beweises zum Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit anwenden.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien X, Y Banachräume und $b : X \times Y \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Es gelte

$$x \mapsto b(x,y) \text{ ist stetig für jedes } y \in Y$$
$$y \mapsto b(x,y) \text{ ist stetig für jedes } x \in X.$$

Dann gibt es eine Konstante $0 \leq C < \infty$, so dass

$$|b(x,y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Sei X ein vollständiger normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ nennt man ein G_δ, wenn sie sich als abzählbarer Schnitt von offenen Teilmengen von X schreiben lässt.

Zeigen Sie: Ist $M \subseteq X$ ein dichtes G_δ, dann ist M überabzählbar.

Was folgt daraus für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$?

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und wenden Sie Lemma 3.1 an.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html