Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
Dr. M. Kühn

SS 2017

Funktionalanalysis
12. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 17. 07. 2017, 12 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (3 + 1 + 2 = 6 Punkte):

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Menge $S := \{t \in \mathbb{R} \ ; \ f \text{ stetig in } t\}$, d. h. die Menge der Stetigkeitspunkte von f, ist eine G_δ-Menge (siehe Aufgabenblatt 11, Aufgabe 4).
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen

$$S_n := \{t \in \mathbb{R} \ ; \ \exists r > 0 : \sup\{f(s) \ ; \ |s-t| < r\} - \inf\{f(s) \ ; \ |s-t| < r\} < \tfrac{1}{n}\}\} \, ,$$

und zeigen Sie $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

b) Zeigen Sie: Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen rationalen Punkten stetig, aber nicht stetig in allen irrationalen Punkten ist.

c) Zeigen Sie: Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{wenn } t = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist stetig in allen irrationalen Punkten, aber nicht stetig in allen rationalen Punkten.

Aufgabe 2 (1 + 3 = 4 Punkte):

Es sei X ein Banachraum. Für $x \in X$ definieren wir $Jx \in X^{**}$ durch $(Jx)(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Zeigen Sie:

(a) $J : X \to X^{**}$ ist linear und beschränkt.

(b) J ist eine Isometrie, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Insbesondere ist J injektiv.
Hinweis: Für "$\geq$"müssen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zu gegebenem x ein geeignetes $f \in X^*$ definieren.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Gegeben sei $\mathcal{P}_2$, der Raum der Polynome bis zum Grad zwei als Teilraum von $\big(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty\big)$.

(i) Zeigen Sie, dass die durch $f(p) := p'(1)$ gegebene Abbildung $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ linear und stetig ist und berechnen Sie ihre Operatornorm.

(ii) Finden Sie eine normerhaltende Fortsetzung auf $C[-1,1]$.

Hinweis zu (i) und (ii): Wie lässt sich $p'(1)$ für $p \in \mathcal{P}_2$ mit Hilfe von Funktionswerten von p angeben?

Aufgabe 4 (3 + 2 + 1 = 6 Punkte):

Sei X ein reeller Banachraum und $A \subseteq X$ sei konvex.

(a) Zeigen Sie:

(i) Das Innere $\operatorname{int} A$ und der Abschluss $\overline{A}$ von A sind ebenfalls konvex.

(ii) Ist $x \in A$ und $y \in \operatorname{int} A$, so ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{int} A$ für alle $\lambda \in [0,1)$.

(iii) Ist $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, so gilt

$$A \subseteq \overline{\operatorname{int} A}\,.$$

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie den Trennungssatz.

(b) Beweisen Sie folgende Version des Trennungssatzes:

Ist $B \subseteq X$ konvex und abgeschlossen, $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ und gilt $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene H, welche A und B trennt.

(c) (Existenz von Stützhyperebenen). Eine Hyperebene $H = \{u \in X \;;\; \langle x', u\rangle = \alpha\}$ mit $x' \in X^* \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Stützhyperebene von A in einem Punkt u, falls

$$\langle x', v\rangle \geq \alpha \quad \text{für alle } v \in A \text{ und } \quad \langle x', u\rangle = \alpha\,.$$

gilt. Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, dann existiert in jedem Randpunkt x von A eine Stützhyperebene H an A.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html