Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
2. Übung

Abgabeschluss ist Dienstag, der 2.5.2017, 10 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (2 Punkte):
Zeigen Sie, dass $C([a,b]) := \{u : [a,b] \to \mathbb{C} \mid u \text{ stetig}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\, \mathrm{d}x$$

kein Hilbertraum ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Es bezeichne $B_n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel in der euklidischen Norm. Zeigen Sie, dass für deren Volumen

$$\mathrm{Vol}\,(B_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

gilt und untersuchen Sie das Verhalten für $n \to \infty$.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist die Berechnung des Integrals $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\, dx$.

Aufgabe 3 (2+7 = 9 Punkte): Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis von Lemma 1.1.

(a) Beweisen Sie Lemma 1.1 für stetige Funktionen, d. h. zeigen Sie:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Gilt für eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0\,,$$

so folgt $u = 0$.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $L^2(\Omega)$ kann man definieren als die Vervollständigung des Raumes $C(\overline{\Omega})$ bezüglich des Skalarproduktes

$$(u, v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)\, dx\,.$$

(Damit ergibt sich, dass man alle $L^2(\Omega)$-Funktionen bezüglich der L^2-Norm $\|u\|_2 := \sqrt{(u,u)_{L^2}}$ durch stetige Funktionen approximieren kann.) Beweisen Sie eine leicht abgeschwächte Form von Lemma 1.1, indem Sie folgende Äquivalenzen zeigen:

Für $u \in L^2(\Omega)$ sind äquivalent:

(i) Für alle $\varphi \in C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\overline{\Omega})\ ;\ \varphi \text{ hat kompakten Träger in } \Omega\}$ gilt $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$.

(ii) Für alle messbaren Mengen $E \subseteq \Omega$ mit $\overline{E} \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_E u\,dx = 0$$

(iii) Für alle messbaren Mengen $E \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_E u\,dx = 0$$

(iv)

$$u(x) = 0 \quad \text{f. ü.}$$

Hinweis: Hier genügt es zu wissen, dass eine Menge E messbar ist, wenn es eine Folge von Borelmengen (d. h. Mengen die sich als abzählbare Vereinigung, Schnitt und Komplementbildung von offenen Mengen ergeben) gibt, die f. ü. gegen E konvergiert. Für eine $L^2(\Omega)$-Funktion u sind die Mengen auf denen u größer, kleiner oder gleich null ist, messbar.

Für den Beweis der Äquivalenzen könnten der Satz von der majorisierten Konvergenz und die Tatsache, dass jede L^2-konvergente Folge eine f. ü. konvergente Teilfolge enthält, hilfreich sein.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Welche der folgenden auf dem Intervall $(0,1)$ definierten Funktionen liegt in $W^{1,2}(0,1)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html