Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
3. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 8. 5. 2017, 10 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (2 + 3 = 5 Punkte):

Gegeben seien $\beta > 0$ und $\alpha > 0$.

(a) Bekanntlich definiert

$$\|y\|_\infty := \max\{|y(t)| \; ; \; t \in [0,\beta]\} \qquad (y \in C[0,\beta])$$

auf dem Raum $C[0,\beta] := C([0,\beta])$ eine Norm.

Zeigen Sie, dass durch

$$\|y\|_\alpha := \max\{|y(t)|e^{-\alpha t} \; ; \; t \in [0,\beta]\}$$

ebenfalls eine Norm definiert ist und dass diese zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist.

(b) Gegeben sei zusätzlich $\eta \in \mathbb{R}$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Durch

$$(Ty)(t) := \eta + \int_0^t f(y(s))\, ds$$

sei eine Abbildung $T : C[0,\beta] \to C[0,\beta]$ definiert. Begründen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Unter welchen Voraussetzungen an α, β und L ist T bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ oder der Norm $\|\cdot\|_\alpha$ eine Kontraktion?

Welche interessante Eigenschaft besitzen die Fixpunkte der Abbildung T?

Aufgabe 2 (1 + 4 + 2 = 7 Punkte):

Sei X ein reller oder komplexer Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$.

(a) Zeigen Sie: Ist X sogar ein Hilbertraum und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm, so gilt für alle $u, v \in X$ die Gleichung

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)\,. \tag{1}$$

(b) Sei X ein reeller Banachraum, dessen Norm für alle $u, v \in X$ die Gleichung (1) erfülle. Zeigen Sie, dass es dann ein Skalarprodukt in X gibt, so dass die Norm $\|\cdot\|$ von diesem erzeugt wird.

(c) Im Unterschied zu (b) setzen wir nun voraus, dass X ein komplexer Banachraum sei. Gibt es auch hier ein Skalarprodukt, welches die Norm erzeugt?

Hinweise: Zu (b): Drücken Sie das Skalarprodukt mit Hilfe der Norm aus. Um die (Bi-)Linearität der von Ihnen gefundenen Abbildung nachzuweisen, zeigen Sie zunächst die Additivität. Folgern sie dann auf die Homogenität für skalare Vielfache aus $\mathbb{N}$, für solche aus $\mathbb{Z}$, für solche aus $\mathbb{Q}$ und schließlich für solche aus $\mathbb{R}$. Für den Teil (c) genügt eine Skizze des Beweises.

Aufgabe 3 (3 + 1 = 4 Punkte):

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ die induzierte Norm. Weiter sei $K \subset H$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Ein $y \in K$ ist genau dann die Projektion $\operatorname{Pr}_K x$ von x auf K, wenn

$$\langle y, \eta - y\rangle \geq \langle x, \eta - y\rangle \qquad \forall \eta \in K$$

gilt.

(b) Die Projektionsabbildung $\operatorname{Pr}_K : H \to K$ ist nicht-expansiv, das heißt es gilt

$$\|\operatorname{Pr}_K x_1 - \operatorname{Pr}_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in H.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die k-te Ableitung der Funktion $\gamma(t) := e^{-\frac{1}{1-t}}$ die Gestalt

$$\gamma^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{(t-1)^{2k}}\gamma(t)$$

mit einem Polynom P_k hat.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html