

Funktionalanalysis

4. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 15. 5. 2017, 12 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $H \neq 0$ ein Hilbertraum und $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ ein lineares stetiges Funktional. Zeigen Sie, dass die Norm

$$\|F\|_{H^*} := \inf \{K ; \forall u \in H : |F(u)| \leq K\|u\|_H\}$$

von F in äquivalenter Weise auch über die Ausdrücke

$$\sup \left\{ \frac{|F(u)|}{\|u\|} ; u \in H \setminus \{0\} \right\} \quad \text{oder} \quad \sup \left\{ \frac{\Re(F(u))}{\|u\|} ; u \in H \setminus \{0\} \right\}$$

definiert werden kann. Dabei bezeichnet $\Re(z)$ den Realteil von z .

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Gegeben sei der Operator ∂ der jeder Funktion $u \in C^1[0, 1]$ seine Ableitung zuordnet.

Zeigen Sie:

(a) $\partial : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ist stetig. Dabei sei $C^1[0, 1]$ wie üblich mit der Norm

$$\|u\|_{C^1} := \|u'\|_\infty + \|u\|_\infty \quad (u \in C^1[0, 1])$$

ausgestattet. Berechnen Sie die Operatornorm.

(b) Zeigen Sie $\partial : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ist nicht stetig, wenn wir diesmal $C^1[0, 1]$ als mit der Supremumsnorm

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)| \quad (u \in C^1[0, 1])$$

ausgestattet auffassen.

Aufgabe 3 (2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte):

Gegeben sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$$

(Zur Existenz einer solchen Funktion vergleichen Sie Aufgabe 4 vom 3. Übungsblatt).

Sei $p \in [1, \infty]$. Wir definieren einen linearen Operator $T_\varphi : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ durch

$$T_\varphi u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)u(y) dy.$$

- (a) Zeigen Sie, dass dieser Operator wohldefiniert ist, das heißt $T_\varphi u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie weiter, dass T_φ auch beschränkt ist.
- (b) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und u habe kompakten Träger. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{supp}(T_\varphi u) \subseteq \text{supp } u + B_1(0)$$

Dabei ist der Träger $\text{supp } u$ einer Lebesgue-Funktion u definiert durch

$$\text{supp } u := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{A ; A \text{ offen und } u(x) = 0 \text{ für f. a. } x \in A\}.$$

- (c) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $T_\varphi u$ beliebig oft differenzierbar ist. Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass für die partiellen Ableitungen von $T_\varphi u$

$$D_{x_i} T_\varphi u(x) = T_{D_{x_i} \varphi} u(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

gilt.

- (d) Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ und fordern zusätzlich $p \neq \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\|T_{\varphi_\varepsilon} u - u\|_p \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Hinweis zu a): Nutzen Sie die Hölder-Ungleichung mit $\varphi = \varphi^{1-1/p} \varphi^{1/p}$.

zu (d): Zeigen Sie die Aussage zunächst für stetige Funktionen mit kompaktem Träger.

Aufgabe 4 (3 + 2 + 2 = 7 Punkte):

Betrachten Sie das Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = \beta f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

in einem offenen und beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \geq 0$. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem (1) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.
- (b) Durch (a) wird eine lineare und stetige Abbildung $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ induziert, die einer rechten Seite f die zugehörige schwache Lösung u zuordnet.
- (c) Der zu S adjungierte Operator $S^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist gegeben durch

$$S^* z := \beta p,$$

wobei $p \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung zu dem Problem

$$\begin{cases} -\Delta p + \alpha p = z & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

ist.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html>