Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
5. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 22. 5. 2017, 12 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Beweisen Sie Satz 5.2 der Vorlesung, das heißt: Sind H_1 und H_2 reelle oder komplexe Hilberträume und ist $A : H_1 \to H_2$ ein linearer und beschränkter Operator, so gilt

(i) Die Operatornormen von A und A^* erfüllen stets $\|A\| = \|A^*\|$.

(ii) Es gilt $A^{**} := (A^*)^* = A$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Finden Sie für die gegebenen Abbildungen jeweils deren adjungierte Abbildung und die Norm jeweils beider Abbildungen:

(a) $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to L^2(0, \infty)$

$(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto f(x) = \xi_i$, falls $x \in (i-1, i), i \in \mathbb{N}$.

(b) $B : L^2(0, \infty) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$f \mapsto \left(\int_{i-1}^{i} h(x) f(x)\, dx\right)_{i=1}^{\infty}$, wobei h eine messbare, beschränkte Funktion auf $(0, \infty)$ ist.

Aufgabe 3 (1 + 3 = 4 Punkte):

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots x_N \in H$ mit $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2.$$

(b) Sei $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem in H. Zeigen Sie, dass für $y \in H$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \langle y, x_n \rangle |^2 \leq \|y\|^2.$$

Aufgabe 4 (4 + 4 = 8 Punkte):

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem in H und $V := \overline{\operatorname{span} S}$.

(a) Nach dem Projektionssatz gibt es zu jedem $y \in H$ eine eindeutige Zerlegung

$$y = v + w, \quad v \in V, \quad w \in V^\perp.$$

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle \, x_n$ von y bezüglich S gegen v konvergiert. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Folge der Partialsummen (s_n) mit $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \langle y, x_n \rangle \, x_n$ eine Cauchyfolge bilden und dann, dass der Grenzwert v ist.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\forall x \in H: \ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \, x_n$

(ii) $\forall x \in H: \sum\limits_{n=1}^{\infty} | \langle x, x_n \rangle |^2 = \|x\|^2$

(iii) $V = H$

(iv) $\langle x, x_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies x = 0$

Ein Orthonormalsystem mit diesen Eigenschaften nennt man eine Orthonormalbasis.