Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
6. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 29. 5. 2017, 12 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei H ein Hilbertraum und seien M, N Teilmengen von H. Zeigen Sie:

(a) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(b) $N \subset M \implies M^\perp \subset N^\perp$

(c) Gilt auch die Umkehrung $M^\perp \subset N^\perp \implies N \subset M$?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei V ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H und sei P von H auf V die orthogonale Projektion.

(a) Beweisen Sie: P ist eine beschränkte lineare Abbildung. Bestimmen sie die Operatornorm von P.

(b) Zeigen Sie: $R(P) := \{Px \mid x \in H\} = V,\ N(P) := \{x \in H \mid Px = 0\} = V^\perp$.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 + 3 = 7 Punkte):

Für $f, g \in C[-1,1]$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Die Vervollständigung des Raumes der rellen stetigen Funktionen bezüglich der Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ wird mit $L^2((-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ bezeichnet. Nach dem Satz von Weierstraß ist $\mathcal{P}[-1,1]$, der Raum der reellen Polynome auf $[-1,1]$, ein dichter Teilraum von $C[-1,1]$ und, wie man sich leicht überlegt, damit auch von $L^2((-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion eines Orthogonalsystems $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ von $L^2((-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ aus Polynomfunktionen. Anders als bei einem Orthonormalsystem sonst üblich, sollen diese so normiert werden, dass $\phi_n(1) = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der Tat ein Skalarprodukt definiert.

(b) Beginnen Sie mit $\phi_0(x) = 1$ und finden Sie ein normiertes Polynom ϕ_1 ersten Grades, welches bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf ϕ_0 senkrecht steht.

(c) Finden Sie ein Polynom ϕ_2 zweiten Grades, welches auf ϕ_0 und ϕ_1 senkrecht steht und ein Polynom ϕ_3 dritten Grades, welches auf ϕ_0, ϕ_1 und ϕ_2 senkrecht steht.

(d) Zeigen Sie, dass das $(n+1)$-te Polynom ϕ_{n+1}, welches auf $\phi_0, \dots, \phi_n$ senkrecht steht, durch die Rekursionsformel

$$\phi_{n+1}(x) = 2x\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)$$

gegeben ist.

Hinweis zu (d): Sie dürfen verwenden, dass $\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle$ für alle $k \geq 1$ gilt.

Aufgabe 4 (3 + 2 = 5 Punkte):

(a) Gegeben seien $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < |\Omega| < \infty$ (hierbei bezeichnet $|\Omega|$ das Lebesguemaß von Ω). Zeigen Sie

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

und berechnen Sie die Operatornorm der Identität $I : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $u \mapsto u$.

(b) Bleibt die Inklusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ richtig, wenn unter (a) auf die Forderung an das endliche Lebesguemaß von Ω verzichtet und der Fall $q = \infty$ ausgeschlossen wird? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Aussage unter den modifzierten Voraussetzungen.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html