

Funktionalanalysis

7. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 12. 5. 2017, 12 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sowie (u_n) eine Folge in H .

(a) Zeigen Sie, dass der schwache Limes eindeutig ist, d.h. aus $u_n \rightharpoonup u$ und $u_n \rightharpoonup v$ folgt $u = v$.

(b) Beweisen Sie:

$$(u_n \rightharpoonup u \text{ und } \|u_n\| \rightarrow \|u\|) \implies u_n \rightarrow u.$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$u_n \rightharpoonup u \implies \|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$$

Falls die Aussage richtig ist, zeigen Sie, wann in dieser Ungleichung die Gleichheit gilt. Falls die Aussage falsch ist, zeigen Sie, was man zusätzlich voraussetzen muss, damit die Ungleichung erfüllt ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sowie $(u_n), (v_n)$ Folgen in H . Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $(u_n \rightharpoonup u \text{ und } v_n \rightharpoonup v) \implies \langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$,

(b) $(u_n \rightarrow u \text{ und } v_n \rightarrow v) \implies \langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$,

(c) $(u_n \rightharpoonup u \text{ und } v_n \rightarrow v) \implies \langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$.

Aufgabe 3 (4 + 4 = 8 Punkte):

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in H^1(a, b)$ mit $u' = 0$ fast überall, so ist u fast überall konstant.

(b) Zeigen Sie, dass Funktionen aus $H^1(a, b)$ stetige Repräsentanten besitzen. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar die Einbettung in die Hölder-stetigen Funktionen

$$H^1(a, b) \subset C^{0, \frac{1}{2}}(a, b)$$

gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Es bezeichne $\ell^2(\mathbb{N}, k^2)$ die Menge aller Folgen $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit Werten in \mathbb{C} , für die

$$\|x\|_* := \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 |x_k|^2} < \infty$$

Man verifiziert leicht, dass $\ell^2(\mathbb{N}, k^2)$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 x_k \overline{y_k}$$

einen Hilbertraum ergibt.

Wie üblich bezeichne $\ell^2(\mathbb{N})$ den Raum der quadratsummierbaren (komplexwertigen) Folgen.

Zeigen Sie:

$$\ell^2(\mathbb{N}, k^2) \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$$

und die kanonische Einbettung ist sogar kompakt.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 8.1.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter "Lehre"):

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html>