Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
8. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 19. 6. 2017, 12 Uhr

(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Zeigen Sie: Für zwei Orthogonalprojektionen E_1 und E_2 auf abgeschlossene lineare Unterräume eines komplexen Hilbertraums sind äquivalent:

(i) $R(E_1) \subseteq R(E_2)$,

(ii) $N(E_2) \subseteq N(E_1)$,

(iii) $E_1E_2 = E_2E_1 = E_1$,

(iv) $E_2 - E_1 \geq 0$.

Dabei heißt ein selbstadjungierten Operator $P : H \to H$ positiv, $P \geq 0$, wenn

$$\langle Px, x\rangle \geq 0$$

für alle $x \in H$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei H ein komplexer Hilbertraum, $K : H \to H$ kompakt, linear und selbstadjungiert. Zeigen Sie: Ist $u \in H$ mit $\|u\| = 1$ eine Maximal- oder Minimalstelle von $y \mapsto \langle Ky, y\rangle$, $\|y\| = 1$, so gilt $\langle Ku, v\rangle = 0$ für alle $v \in H$ mit $\|v\| = 1$ und $v \perp u$.

Hinweis: Für $\Re \langle Ku, v\rangle$ wurde die Aussage bereits in der Vorlesung in Satz 9.1 bewiesen.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{in } (0,1), \\ \quad u(0) = 0, & \\ \quad u(1) = 0 & \end{cases}$$

auf einem Intervall $(0,1) \subset \mathbb{R}$ mit $f \in C(0,1)$. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass es eine Greensche Funktion $G \in C([0,1] \times [0,1])$ gibt, so dass sich die eindeutige Lösung des Randwertproblems durch Anwendung des Operators

$$T_0 : C(0,1) \to C^2(0,1), \quad (T_0 g)(x) := \int_0^1 G(x,y) g(y) \, dy$$

auf die rechte Seite f angeben lässt. Mit derselben Vorschrift kann man einen linearen Operator

$$T : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \quad (Tg)(x) := \int_0^1 G(x,y) g(y) \, dy$$

definieren. Zeigen Sie, dass sich der Spektralsatz (Satz 9.2) auf T anwenden lässt und bestimmen Sie das Orthonormalsystem von Eigenfunktionen von T und die zugehörigen Eigenwerte. Sie dürfen dabei verwenden, dass die Funktion G symmetrisch ist, das heißt $G(x,y) = G(y,x)$.

Aufgabe 4 (7 Punkte):

Seien H ein Hilbertraum und $0 \neq x^0 \in H$. Ein kompakter selbstadjungierter Operator $A : H \to H$ habe den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (d. h. für alle Eigenwerte λ von A gilt $|\lambda| \leq |\lambda_1|$). Und es bezeichnen V_{λ_1} und $V_{-\lambda_1}$ die zu λ_1 bzw. $-\lambda_1$ gehörigen Eigenräume.

Zur Bestimmung von $|\lambda_1|$ kann folgender Algorithmus eingesetzt werden:

$$\begin{cases} w^0 := \frac{1}{\|x^0\|} x^0 & & & \text{für } k = 0 \\ x^k := A w^{k-1}\,, & \alpha_k := \|x^k\|\,, & w^k := x^k / \alpha_k & \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = |\lambda_1|$$

für alle $x_0 \notin (V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1})^{\perp}$.

Eignet sich das Verfahren auch zur Bestimmung eines Eigenvektors? Was passiert, wenn man mit $x^0 \in V_{\lambda_1}^{\perp}$ startet?

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html