Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig
M. Kühn, M.Sc.

SS 2017

Funktionalanalysis
9. Übung

Abgabeschluss ist Montag, der 26. 6. 2017, 12 Uhr
(in den Übungsbriefkasten "Funktionalanalysis" im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$ die sogenannte Vierecksungleichung gilt:

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V.$$

(b) Sei $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften:

(i) $\varphi(0) = 0,\ \varphi(x) > 0$ für $x > 0$,

(ii) φ monoton wachsend,

(iii) φ' monoton fallend.

Zeigen Sie, dass dann $\tilde{d}(x, y) := \varphi(d(x, y))$ ebenfalls eine Metrik ist.
Bemerkung: $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ ist ein Beispiel für solch eine Funktion.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte):

Sei d eine translationsinvariante Metrik auf V, d.h.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in V.$$

(a) Zeigen Sie

$$d(nx, 0) \leq n\, d(x, 0)$$

für alle $x \in V$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei (x_n) eine Folge in V mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Zeigen Sie, dass es dann eine Folge positiver Zahlen (γ_n) gibt, so dass gilt: $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und $\gamma_n x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(c) Ist d zusätzlich skalierungsinvariant, d.h.

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \qquad \forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C},$$

so definiert $\|x\| := d(x, 0)$ eine Norm auf V.

Aufgabe 3 (3 + 2 = 5 Punkte):

(a) Weisen Sie nach, dass der Folgenraum ℓ^p vollständig ist ($1 \leq p \leq \infty$).

(b) Zeigen Sie, dass der Folgenraum $\ell^1 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$ mit der Metrik $d_\infty(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 4 (3 + 2 = 5 Punkte):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, messbare Menge und $\tilde{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}\}$, sowie $N := \{f \in \tilde{F} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Restklassenraum $F := \tilde{F}/N$ bezüglich der Metrik

$$d(f, g) := \int_\Omega \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \, dx$$

vollständig ist.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass der Raum der stetigen Funktionen $C(\Omega)$ bezüglich der Metrik aus (a) vollständig ist.

Informationen zur Vorlesung und den Übungen gibt es auf der **Veranstaltungshomepage** (auf der Internetseite des Lehrstuhls Kawohl verlinkt unter “Lehre”):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1717SS/FA.html