

# Forschungsvorhaben

2004/2005

## **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Deformation dünner Zylinder: Mountain-Pass-Zugang*

Bearbeiter: Horák, J., Lord, G. J., Peletier, M. A.

Leiter: Horák, J.

Die Stauchung eines dünnen Zylinders verursacht Deformationen, welche mit der Hilfe von nichtlinearen von Kármán-Donnel-Gleichungen modelliert werden können. Das Modell besitzt eine variationelle Form. Der Mountain-Pass-Zugang ermöglicht nicht nur die Existenz einer Lösung nachzuweisen, sondern auch eine numerische Annäherung zu berechnen. In der Praxis weisen Zylinder Materialfehler und geometrische Ungenauigkeiten auf, die im Modell nicht berücksichtigt werden können, die aber die Stabilität des Zylinders beeinflussen. Durch eine theoretische und numerische Untersuchung der Mountain-Pass-Energie kann eine Abschätzung der Stabilität reeller Zylinder gewonnen werden.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Heriot-Watt Univ., Edinburgh, TU Eindhoven

## **Numerische Unterstützung in der Analysis partieller Differentialgleichungen**

*Ein computer-unterstützter Existenz- und Nichteindeutigkeitsbeweis für wandernde Wellen in nichtlinear abgestützten Balken*

Bearbeiter: Horák, J., Breuer, B., McKenna, P. J., Plum, M.

Leiter: Horák, J.

Wandernde Wellen in einer Hängebrücke werden mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung modelliert, die Aufhängung kann durch eine exponentielle Funktion beschrieben werden. Die Existenz einer Lösung konnte man bis jetzt nur für fast alle Wellengeschwindigkeiten  $c$  beweisen, aber nicht für alle. Unser Verfahren ergänzt dieses Resultat, indem es für einen fest gewählten Wert der Geschwindigkeit die Existenz liefert. Das Verfahren braucht eine numerische Annäherung an eine Lösung. Mit Hilfe der Fixpunktmethode garantiert es die Existenz einer Lösung in der Nähe der berechneten Approximation. Für  $c = 1.3$  haben wir die Existenz von mindestens 36 Lösungen bewiesen.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: 2005 abgeschlossen

## **Numerische Unterstützung in der Analysis partieller Differentialgleichungen**

*Eindeutigkeit von positiven Lösungen semilinearer elliptischer Gleichungen*

Bearbeiter: Horák, J., Pacella, F.

Leiter: Horák, J.

Für die Eindeutigkeit von positiven Lösungen semilinearer elliptischer Dirichlet-Probleme spielen geometrische Eigenschaften der zweiten Eigenfunktion des linearisierten Problems eine wichtige Rolle. Für viele Gebiete und Nichtlinearitäten ist die Analysis noch nicht weit entwickelt, und numerische Experimente bleiben das einzige Mittel zur Untersuchung. Da das Problem eine variationelle Struktur hat, können der Mountain-Pass-Algorithmus und die Methoden des steilsten Abstiegs angewendet werden.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Università di Roma – La Sapienza

## **Geometrische Analysis**

*Über konvexen Gebieten errichtete Kegel minimaler Oberfläche*

Bearbeiter: Belloni, Marino, Horstmann, Dirk, Kawohl, Bernd

Leiter: Kawohl, Bernd

In der Zeitschrift *Mathematica Scandinavica* **3** ist 1955 von Arne Pleijel die seit nunmehr 50 Jahren unbeantwortete Frage gestellt worden, welche Koordinaten die Spitze desjenigen über einem beliebigen konvexen Gebiet errichteten Kegels bei gegebenen Höhe  $h$  hat, der unter allen derartigen Kegeln minimale Oberfläche besitzt. Weiter fragte Pleijel nach der Lage dieses Punktes für den Fall, daß die Höhe  $h$  verschwindend klein oder unendlich groß wird. In diesem Projekt wurde die Pleijels Frage (zum Teil, nämlich) für reflexionssymmetrische konvexe Gebiete mit Hilfe von analytischen und numerischen Mitteln beantwortet.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Università di Parma

## **Partielle Differentialgleichungen**

*Parabolische Modelle mit Vorwärts-Rückwärtsdiffusion*

Bearbeiter: Horstmann, Dirk, Schweizer, Ben

Leiter: Horstmann, Dirk

Parabolische Modelle mit Vorwärts-Rückwärtsdiffusion finden im Zusammenhang mit der Bildverarbeitung Anwendung. Auch in der Biologie werden

manche Populationen mit Hilfe solcher Gleichungen modelliert. In diesem Projekt wurden unterschiedliche Lösungsbegriffe für solche Probleme verglichen und die Unterschiede zwischen zwei alternativen Ansätzen zur Konstruktion von maßwertigen Lösungen im einzelnen herausgearbeitet.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Universität Heidelberg, Universität Basel

### **Partielle Differentialgleichungen**

*Parabolische Systeme mit Kreuzdiffusionseffekten*

Bearbeiter: Horstmann, Dirk

Leiter: Horstmann, Dirk

In unterschiedlichen Einzelprojekten wurden sogenannte *Kreuzdiffusions Modelle* näher studiert und der Einfluß der Kreuzdiffusions Terme auf das Stabilitätsverhalten von Lösungen der untersuchten Modelle analysiert. Eine allgemeine Theorie für parabolische Kreuzdiffusions-Systeme stellt sich als schwierig dar, da eine Existenz-Theorie für Lösungen solcher Modelle nur unter speziellen Annahmen existiert. In möglichst allgemeiner Form wurden einige der zu beobachtenden Effekte und Musterbildungen bei Reaktions-Kreuzdiffusions-Systemen beschrieben und untersucht. Diese beinhalten unter anderem Kriterien für das Unbeschränktwerden der Lösungen der jeweiligen Modelle in endlicher oder unendlicher Zeit und die mögliche Formation von  $\delta$ -Singularitäten.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

### **Mathematische Probleme der Lebenswissenschaften**

*Analyse des qualitativen Verhaltens der Lösungen von Chemotaxis beschreibenden Modellen*

Bearbeiter: Horstmann, Dirk, Winkler, M.

Leiter: Horstmann, Dirk

In mehreren Einzelarbeiten wurde unterschiedliche Modelle zur Beschreibung von positiver Chemotaxis weitergehend analysiert. Hierbei stand die Frage, ob die Lösungen der untersuchten Modelle global in der Zeit existieren oder gegebenenfalls im Zeitverlauf unbeschränkt werden können, im Mittelpunkt.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: RWTH Aachen

### **Partielle Differentialgleichungen**

*Qualitatives Verhalten von Lösungen partieller Differentialgleichungen*

Bearbeiter: Kawohl, B., Horstmann, D., Mester, M., Gazzola, F., Fragala, I.  
Leiter: Kawohl, Bernd

Im Berichtszeitraum gab es zu diesem Thema Untersuchungen über Differentialgleichungen, die zu Musterbildung führen sowie über Symmetriefragen bei überbestimmten Randwertaufgaben.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Milan Politecnico, ESF Projekt GLOBAL

### **Partielle Differentialgleichungen**

*Elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung*

Bearbeiter: Kawohl, B., Sweers, G.

Leiter: Kawohl, Bernd

Es wurde u.a. das Verhalten anisotroper Platten und moderner biegesteifer Kompositmaterialien (wie z.B. GLARE) unter statischer und dynamischer Belastung untersucht. Dabei wurde ein bereits von Bernoulli vorgeschlagenes mathematisches Modell wissenschaftlich rehabilitiert.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: RiP Programm, Oberwolfach

### **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Mathematische Bildverarbeitung*

Bearbeiter: Kawohl, B., Mester, M., Stara, J., Juutinen, P.

Leiter: Kawohl, Bernd

Eine Reihe von entarteten parabolischen Differentialgleichungen, die in der Bildverarbeitung Verwendung finden, wurde gründlich analysiert. Es konnte u.a. nachgewiesen werden, dass verschiedene mathematische Bildverarbeitungsverfahren bei ihrer Durchführung auf dem Rechner nicht nur zufällig ähnlich gute Resultate liefern, sondern zueinander nahezu äquivalent sind. Solche Verfahren finden beispielsweise in der Medizin oder bei der Aufbereitung von Satellitenbildern Anwendung.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: ESF Projekt GLOBAL, SFB 359 in Heidelberg, Karls-Universität Prag

### **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Spektraltheorie nichtlinearer Operatoren*

Bearbeiter: Kawohl, B., Belloni, M., Ferone, V., Juutinen, P.

Leiter: Kawohl, Bernd

Untersucht wurde insbesondere das unter Einführung einer Finslermetrik veränderte Verhalten von Eigenfunktionen. Dabei stellte sich heraus, dass Aussagen, welche in der euklidischen Metrik leicht beweisbar sind, nicht länger gültig sein müssen oder anderer Beweise bedürfen. Hierzu zählen beispielsweise die Eindeutigkeit oder Symmetrie von sogenannten Grundzuständen. Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt  
Fördernde Institutionen: CNR, Univ. di Napoli, Univ. Parma

### **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Anisotrope Operatoren und Funktionenräume*

Bearbeiter: Kawohl, B., Plura, O., Fragala, I., Gazzola, F.

Leiter: Kawohl, Bernd

Die hier untersuchten Differentialgleichungen sind hochgradig entartet und modellieren anisotrope Medien, z.B. Gewebe aus Draht oder anderen elastischen Materialien. Unter anderem wurden Existenz- und Nichtexistenzsätze sowie ein starkes Maximumprinzip hergeleitet.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Politecnico di Milano

### **Geometrische Analysis**

*Cheegergebiete*

Bearbeiter: Kawohl, B., Lachand-Robert, T., Staschullis, S.

Leiter: Kawohl, Bernd

Für  $p$  gegen 1 konvergiert der erste Eigenwert, des sogenannten  $p$ -Laplace Operators gegen diese Cheegersche Konstante. Sie gibt die größtmögliche untere Schranke für den Quotienten aus Umfang durch Volumen eines Teilgebietes an. Es wurde untersucht, daß sich die Konstante tatsächlich für ein Teilgebiet einstellt, d.h. daß das entsprechende geometrische Variationsproblem einen Minimierer und nicht nur ein Infimum besitzt. In zwei Raumdimensionen wurde ein numerisches Verfahren zur Berechnung der entsprechenden Cheegermengen für konvexe Gebiete entwickelt. Ferner wurde für dieses nichtglatte, nichtkonvexe Variationsproblem unter nichtglaten Nebenbedingungen nicht eine einzelne, sondern eine ganze Klasse von Euler-Lagrange Gleichungen als notwendige Bedingung hergeleitet.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

### **Mathematische Elastizitätstheorie**

*Material mit Blockierungsrestriktionen bei nichtlinear elastischen Stäben*

Bearbeiter: Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Blockierungsrestriktionen (locking constraints) für nichtlinear elastische Materialien führen in gewisser Weise auf nichtholonome Nebenbedingungen für entsprechende Variationsprobleme. Für verschiedene derartige Restriktionen wurde die Existenz von Lösungen nachgewiesen und eine notwendige Bedingung für Minimierer hergeleitet.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: 2004 abgeschlossen

### **Geometrische Analysis**

*Geodätische Kurven unter Krümmungsbeschränkungen*

Bearbeiter: Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Man betrachtet längenminimale Kurven bei denen die Position und die Tangentenrichtung an den Endpunkten vorgegeben sind. Ferner soll die Krümmung durch eine vorgegebene Konstante beschränkt sein. Derartige Variationsprobleme mit nichtholonome Nebenbedingung sind analytisch schwierig zu behandeln. Während eine notwendige Bedingung für Minimallösungen bisher entweder elementargeometrisch oder mit Methoden der optimalen Steuerung hergeleitet wurde, so konnte dies auf der Grundlage einer speziellen Kurvendarstellung mit Mitteln der konvexen Analysis getan werden. Weitergehende Untersuchungen unter Hinzunahme von starren Hindernissen sind geplant.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

### **Mathematische Elastizitätstheorie**

*Kontakt zwischen nichtlinear elastischen Körpern*

Bearbeiter: Habeck, D., Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Der Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern wird im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie mit Mitteln der Variationsrechnung untersucht. Eine wesentliche Schwierigkeit hierbei ist, daß man keine verwertbaren Informationen über die Regularität des Randes von Lösungen hat. Unter Verwendung einer Lagrangeschen Multiplikatorenregel für entartete Probleme kann eine notwendige Bedingung für Minimierer hergeleitet werden. Die Untersuchungen werden derzeit auf den Selbstkontakt eines Körpers ausgedehnt.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: DFG-Forschungsprojekt

## **Kontinuumsphysik**

*Mathematische Grundlage für Kontaktinteraktionen*

Bearbeiter: Degiovanni, M., Schuricht, F., Šilhavý, M.

Leiter: Schuricht, F.

Cauchys Modell zur Beschreibung von Traktion und Wärmefluß besitzt nicht genügend Struktur, um Singularitäten befriedigend zu beschreiben. Basierend auf einfachen physikalisch motivierten Annahmen wurde eine völlig neue mathematische Grundlage zur Beschreibung von Kontaktinteraktionen entwickelt, die eine detailliertere Beschreibung bei Konzentrationseffekten liefert und gewisse Inkonsistenzen der klassischen Theorie in natürlicher Weise beseitigt. Methoden der geometrischen Maßtheorie und die Analyse von Tensorfeldern, deren distributionelle Divergenz ein Maß ist, spielen hierbei eine zentrale Rolle. Eine Erweiterung des Modells und die Untersuchung von speziellen Detailfragen sind geplant.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

Fördernde Institutionen: Katholische Universität Brescia, Universität Pisa

## **Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung**

*Eigenwertproblem für den 1-Laplaceoperator*

Bearbeiter: Kawohl, B., Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Das Eigenwertproblem für den  $p$ -Laplaceoperator wurde für  $p > 1$  intensiv untersucht. Für  $p = 1$  erhält man ein hochgradig singuläres Problem das analytisch schwer zugänglich ist. Für ein zugehöriges Variationsproblem konnte gezeigt werden, daß Minimierer im allgemeinen eine ganze Klasse von Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen müssen. Insbesondere wurde dabei auch gezeigt wie die zugehörige partielle Differentialgleichung zu verstehen ist. Weiterführende Fragen werden gegenwärtig untersucht.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

## **Numerik**

*Simulation nichtlinear elastischer Kontaktprobleme*

Bearbeiter: Krause, R., Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Numerische Simulationen für elastische Kontaktprobleme, die zum Teil schon gut entwickelt sind, beruhen in der Regel auf der linearen Elastizitätstheorie. Da dies für zahlreiche aktuelle Anwendungen zu restriktiv ist sollen neue Ver-

fahren auf der Grundlage der allgemeinen nichtlinearen Theorie entwickelt werden.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

### **Mathematische Elastizitätstheorie**

*Regularität für Minimallösungen*

Bearbeiter: Antman, S. , Schuricht, F.

Leiter: Schuricht, F.

Die mechanisch natürliche Bedingung, daß die elastische Energiedichte bei totaler Kompression des Materials beliebig groß wird, ist eine zentrale Schwierigkeit bei Regularitätsuntersuchungen von Lösungen des Variationsproblems der nichtlinearen Elastizitätstheorie. Mit einem speziellen neuen Ansatz soll versucht werden, bisher unzugängliche Fragen zu lösen.

Voraussichtlicher Abschlußtermin: unbestimmt

### Veröffentlichungen

#### *Aufsätze:*

Horák, J., Bass, R. F., McKenna, P. J.: On the lift-off constant for elastically supported plates. Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004) 2951–2958

Horák, J., Breuer, B., McKenna, P. J., Plum, M.: A computer-assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam. J. of Differ. Equations, erscheint demnächst.

Horák, J.: Constrained mountain pass algorithm for the numerical solution of semilinear elliptic problems. Numer. Math., **98** (2004) 251–276

Horák, J., Lord, G. J., Peletier, M. A.: Cylinder buckling: the mountain pass as an organizing center. Preprint, eingereicht.

Horák, J.: Constrained mountain pass algorithm for the numerical solution of semilinear elliptic problems. In Feistauer, M. (ed.) et al., Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2003 in Prague, Springer, Berlin (2004) 449–458



- Horák, J.: Constrained mountain pass algorithm. Proceedings of the Equadiff 03, (eds. F. Dumortier, H. W. Broer, J. Mahwin, A. Vanderbauwhede, S. Verduyn Lunel), World Scientific Publishing Co, Singapore, (2005) 1086–1088
- Horstmann, D.: From 1970 until present: The Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II, Jahresbericht der DMV **106** (2004) 51–69
- Horstmann, D., Stevens, A.: A constructive approach to traveling waves in chemotaxis, J. of Nonlinear Science, **14** (2004) 1–25
- Horstmann, D., Othmer, H. G., Painter, K. J.: Aggregation under local reinforcement: From lattice to continuum, Europ. J. of Appl. Math., **15** (2004) 545–576
- Horstmann, D.: On some cross-diffusion models in population dynamics and their connections to well-posed filters in signal enhancement processes, IMA J. Appl. Math., **70** (2005) 386–399
- Horstmann, D., Winkler, M.: Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system, J. of Differ. Equations **215** (2005) 52–107
- Horstmann, D.: Forward-backward parabolic equations and their time delay approximations, Proceedings of the Equadiff 03, (eds. F. Dumortier, H. W. Broer, J. Mahwin, A. Vanderbauwhede, S. Verduyn Lunel), World Scientific Publishing Co, Singapore, (2005) 1089–1091
- Horstmann, D.: Remarks on some Lotka-Volterra type cross-diffusion models, Nonlinear Analysis: Real World Applications, erscheint demnächst
- Horstmann, D., Kawohl, B., Belloni, M.: Cones based on reflection symmetric convex polygons: Remarks on a problem by A. Pleijel, zur Veröffentlichung eingereicht
- Horstmann, D., Schweizer, B.: Comparison of two solution concepts for a forward-backward diffusion, zur Veröffentlichung eingereicht
- Kawohl, B.: From Mumford-Shah to Perona-Malik in image processing, Math. Methods Appl. Sci., **27** (2004), p. 1803–1814.

- Kawohl, B., Fragala, I., Gazzola, F.: Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear equations, *Ann. Inst. H. Poincaré.*, **21** (2004), p. 715–734.
- Kawohl, B., Stara, J.: Observations on a nonlinear evolution equation, *Applicable Analysis*, prEview online, DOI 10.1080/00036810500277470
- Kawohl, B., Shahgholian, H., Gamma-Limits in some Bernoulli free boundary problem, *Archiv d. Math.*, **84** (2005) 79–87
- Kawohl, B., Symmetry in anisotropic media, in: *Equadiff 2003*, eds. F. Dumontier, H. Broer, J. Mawhin, A. Vanderbauwhede & S.V. Lunel, World Scientific Publishing Co, Singapore (2005), 301–306
- Kawohl, B., Lachand-Robert, T.: Characterization of Cheeger sets for convex subsets of the plane, *Pacific J. Math.*, erscheint demnächst
- Kawohl, B., Belloni, M., Juutinen, P.: The  $p$ -Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as  $p \rightarrow \infty$  in a Finsler metric, *J. Europ. Math. Soc.*, im Druck
- Kawohl, B., Sweers, G.: On the differential equation  $u_{xxxx} + u_{yyyy} = f$  for an anisotropic stiff material, *SIAM J. Math. Anal.*, im Druck
- Kawohl, B., Chipot, M., Gangbo, W.: On some nonlocal variational problems, zur Veröffentlichung eingereicht
- Kawohl, B., Juutinen, P.: On the evolution governed by the infinity Laplacian, zur Veröffentlichung eingereicht
- Kawohl, B., Fragala, I., Gazzola, F.: Overdetermined problems with possibly degenerate ellipticity, a geometric approach. zur Veröffentlichung eingereicht
- Kawohl, B., Belloni, M., Horstmann, D.: Cones based on reflection symmetric polygons: Remarks on a problem of A.Pleijel. zur Veröffentlichung eingereicht
- Kawohl, B., Schuricht, F.: Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eigenvalue problem. zur Veröffentlichung eingereicht

- Kawohl, B.: Overdetermined problems and the  $p$ -Laplacian. zur Veröffentlichung eingereicht
- Schuricht, F., v.d. Mosel, H. Characterization of ideal knots. *Calc. Var.* 19 (2004) 281-305
- Schuricht, F. Contact problems in nonlinear elasticity. Modeling, analysis, application. In: V. Benci, A. Masiello (eds.). *Nonlinear Analysis and Applications to Physical Sciences*. Springer 2004, p. 91 - 133
- Schuricht, F. Locking constraints for elastic rods and a curvature bound for spatial curves. to appear in *Calc. Var.*
- Schuricht, F., Habeck, D. Contact between nonlinearly elastic bodies. to appear in *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*
- Schuricht, F. A new mathematical foundation for contact interactions in continuum physics. zur Veröffentlichung eingereicht
- Schuricht, F., Kawohl, B. Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eigenvalue problem. zur Veröffentlichung eingereicht
- Wagner, A., Cox, S.: Lateral overdetermination of the FitzHugh-Nagumo system. *Inverse Problems* **20** (2004) 1639–1647
- Wagner, A., Optimal shape problems for eigenvalues. *Comm. in Partial Differential Equations* **30** (2005) 1039–1063
- Dissertationen:*
- Mester, M.: Mathematische Methoden zur Bildbearbeitung, Dissertation 2004.
- Habilitationen:*
- Horstmann, D.: On some reaction-diffusion models with cross-diffusion, Habilitationsschrift, Universität zu Köln, 2004