Was ist eine runde Sache?

Bernd Kawohl

(Revidiertes Manuskript eines Vortrags
zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. Wolfgang Walter)

1.) Am 28.1.1986 kam es in den USA beim Start der Weltraumfähre "Challenger" zu einem folgenschweren Unglück, bei dem alle Insassen des Raumschiffs ums Leben kamen. Die Regierung der USA setzte eine Untersuchungskommission ein. Ein Mitglied der Kommission, der Nobelpreisträger für Physik, Richard Feynman, beschreibt in [19] die Suche nach den möglichen Ursachen des Unglücks. Wie inzwischen allgemein bekannt ist, sieht man heute eine der Hauptursachen des Unglücks darin, daß in den Startraketen (oder sog. booster rockets) ein Dichtungsmaterial verwendet wurde, welches bei relativ niedrigen Temperaturen spröde wurde. Feynman demonstrierte dies eindrucksvoll auf einer Pressekonferenz, indem er ein Stück des Dichtungsrings in ein Glas Eiswasser tauchte und es anschließend erfolglos zu deformieren versuchte. Weitere Ursachen haben möglicherweise mit zum Unglück beigetragen. Feynman ließ sich das Beladen der Raketen vor Ort zeigen. Die Startraketen sind wiederverwendbar. Daher hat man sie jeweils aus dem Meer geborgen, auf das sie mit großer Geschwindigkeit aufgeschlagen waren. Sie wurden gereinigt, gerichtet, mit Treibstoff gefüllt, liegend auf Waggons zum Startplatz gebracht und dort vertikal aufgestellt. Dabei unterlagen sie leichten Verformungen; und um sicherzustellen, daß sie auch nach dem Transport einen runden Querschnitt hatten, maß man ihre Dicke aus drei verschiedenen Richtungen. Das folgende Bild entstammt dem Buch [19] von Feynman, der sofort sah, daß dieses Vorgehen nicht sachgemäß war.

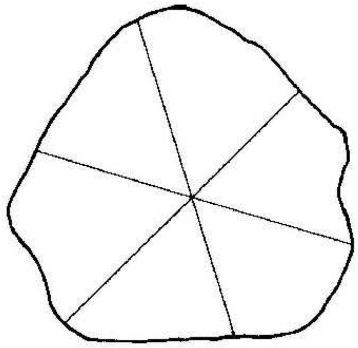

Bild 1: Feynmans Skizze

Dies bringt uns auf das Thema des Vortrages. Wann hat ein zylindrisches Gebilde einen kreisförmigen Querschnitt? Anders gefragt, welche Messungen muß man durchführen, um sicher zu sein, daß ein zweidimensionales Gebiet eine Kreisscheibe ist? Dreimal die Dicke (d.h. den Abstand zweier paralleler Tangenten) zu messen reicht offensichtlich nicht. Angenommen das Gebiet ist aus jeder Richtung gleich dick. Sind solche Gleichdicke (oder sogenannte Orbiformen, siehe [7]) automatisch

Kreise? Die Antwort ist negativ und war schon Euler bekannt [16]. Ein bekanntes Gegenbeispiel ist das sogenannte Reuleaux-Dreieck [36, Kap.3, §25], welches wir im Wankelmotor wiederfinden, oder die englische 50-Pence Münze, die aus einem gleichseitigen Dreieck oder Siebeneck entstehen, indem über jede Seite ein Kreisbogen geschlagen wird, der zwei benachbarte Ecken schneidet und dessen Mittelpunkt in der gegenüberliegenden Ecke liegt, siehe Bild 2.

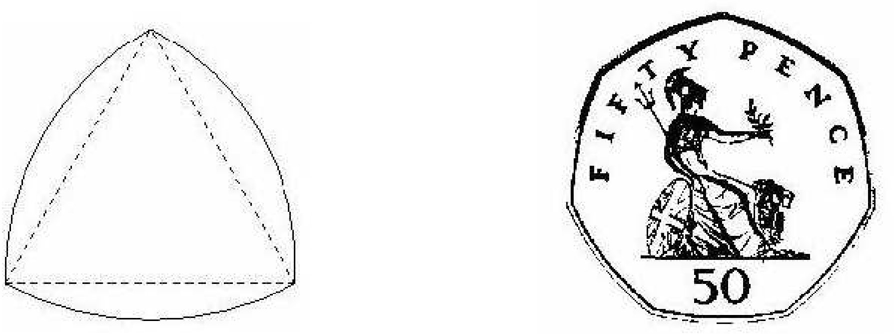

Bild 2: Zwei bekannte Gleichdicke

Münzen möchte man gerne gleichdick haben, da ein Münzautomat im allgemeinen nur ihren Durchmesser prüft. Auf parallel angeordneten zylindrischen Walzen, deren Querschnitt ein Gleichdick ist, kann man schwere Gegenstände ohne Rumpeln über eine Ebene rollen. Die sogenannte isodiametrische Ungleichung besagt: *Unter allen ebenen Gleichdicken vorgegebener Dicke d hat die Kreisscheibe maximalen Flächeninhalt.* Ein verblüffend eleganter Beweis hierfür findet sich bei Littlewood [30]. Man überzeugt sich zunächst davon, daß ein Gleichdick konvex sein muß. Dann malt man sich Bild 3 auf und schließt unter Einführung von Polarkoordinaten (ρ, θ) geschwind wie folgt.

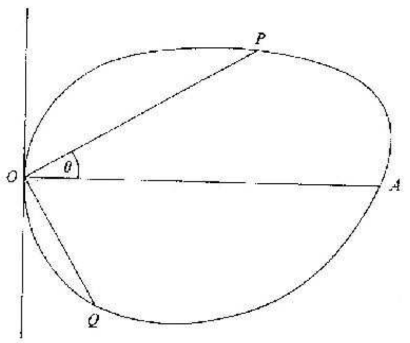

Bild 3: Littlewoods Beweis

$$\text{Fläche } = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r(\theta)} \rho \, d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \Big[r^2(\theta) + r^2(\theta - \frac{\pi}{2}) \Big] \, d\theta$$

Doch für alle $\theta \in (0, \pi/2)$ ist der Integrand rechts nach dem Satz von Pythagoras und wegen der Dicke d gerade $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 \leq d^2$. Damit ist die Fläche

jedes Gleichdicks der Dicke d nach oben beschränkt durch die Fläche $\pi d^2/4$ eines Kreises mit Radius $d/2$.
Übrigens kann man den Satz des Thales verwenden, um zu zeigen, daß nur der Kreis diese maximale Fläche unter allen Gleichdicken hat. Die Royal Mint spart also durch die unübliche Gestalt ihrer Münzen Material ein, ein Aspekt, der bei Goldmünzen von gewisser Wichtigkeit gewesen sein dürfte. Selbstverständlich kann man auch die Frage nach dem ebenen Gleichdick mit kleinstmöglicher Fläche stellen. Dies ist das oben erwähnte Reuleaux-Dreieck, eine Tatsache, für die es mehrere Beweise gibt [4, 29, 20, 28, 22].
Gleichdicke sind nicht nur konvex, sondern sogar strikt konvex, in dem Sinne, daß die (offene) Verbindungsstrecke zwischen zwei verschiedenen Randpunkten ganz im Inneren des Gleichdicks verläuft. Jedem Punkt x auf dem (als differenzierbar angenommenen) Rande eines Gleichdicks kann man daher eineindeutig einen äußeren Normalenvektor $n(x)$ zuordnen, und diesem einen Winkel θ gegenüber der x_1-Achse. Daher können wir x und n auch als periodische Funktionen von $\theta \in [0, 2\pi]$ auffassen. Die Dicke des Gleichdicks, gemessen aus Richtung θ, ist dann die Projektion der Verbindungsstrecke $x(\theta) - x(\theta + \pi)$ zwischen den beiden Tangenten $n(\theta)$, das heißt $d(\theta) = (x(\theta) - x(\theta + \pi)) \cdot n(\theta)$, siehe Bild 4.

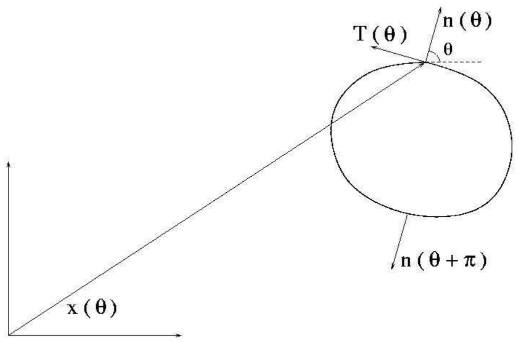

Bild 4: Berechnung von d

Wenn wir $f(\theta) := x(\theta) \cdot n(\theta)$ setzen und $n(\theta) = -n(\theta + \pi)$ beachten, erhalten wir eine Funktionalgleichung für die sogenannte Stützfunktion f von Gleichdicken, nämlich

$$f(\theta) + f(\theta + \pi) = d. \tag{1}$$

Aus Lösungen von (1) lassen sich Gleichdicke konstruieren, denn für jedes θ gibt $f(\theta)$ den Abstand einer Tangente mit Normalenrichtung $n(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ vom Ursprung an. Wenn wir einen Tangentialvektor $T(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ einführen, dann zeigt eine einfache Rechnung, daß $x(\theta) = f(\theta) \cdot n(\theta) + f'(\theta) \cdot T(\theta)$ gilt. Eine spezielle Lösung von (1) ist zum Beispiel $g(\theta) = a\cos((2n+1)\theta) + d/2$, und das dadurch beschriebene Gebiet ist für hinreichend kleines positives a konvex. Funktionalgleichungen haben Herrn Walter übrigens zeitlebens interessiert. Sie sind sein "Hobby" und waren einer der Forschungsgegenstände auf der Serie der von ihm organisierten Oberwolfachtagungen "General Inequalities, I –VII ". Mit

Hilfe der Funktionalgleichung (1) läßt sich ferner der folgende verblüffende Satz von Barbier [1] zeigen.
Alle ebenen Gleichdicke der Dicke d haben den selben Umfang πd.
Zum Beweis dieses Satzes erinnern wir an den Tangentialvektor $T(\theta)$. Dann ist der Umfang des Gleichdicks gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Umfang } &= \int_0^{2\pi} |x'(\theta)| \, d\theta = \int_0^{2\pi} [(f(\theta) + f''(\theta)] \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [f(\theta) + f(\theta+\pi)] + [f(\theta) + f(\theta+\pi)]'' \, d\theta = \pi d. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei beruht das letzte Gleichheitszeichen auf (1), das vorletzte auf dem obigen Trick von Littlewood, und das zweite bedarf einer kurzen Rechnung. Nach der Produktregel ist $f'(\theta) = x'(\theta) \cdot n(\theta) + x(\theta) \cdot T(\theta) = x(\theta) \cdot T(\theta)$, denn $x'(\theta)$ steht senkrecht auf $n(\theta)$. Ferner ergibt sich $f''(\theta) = x'(\theta) \cdot T(\theta) + x(\theta) \cdot (-n(\theta)) = |x'(\theta)| - f(\theta)$, und damit ist die Identität der ersten beiden Integranden in (2) gezeigt.

Auch drei- oder n-dimensionale Gleichdicke sind von mathematischem Interesse. Für n-dimensionale Gleichdicke gilt weiterhin die isodiametrische Ungleichung: *Unter allen n-dimensionalen Gleichdicken vorgegebener Dicke d hat die n-dimensionale Kugel maximales Volumen.* Allerdings ist der Beweis wesentlich aufwendiger als im zweidimensionalen Fall. Er benutzt Steiner Symmetrisierung, siehe z.B. [17, p.69]. Dreidimensionale Gleichdicke entstehen beispielsweise durch Rotation der in Bild 2 gezeigten ebenen Gebiete um eine ihrer Symmetrieachsen, doch gibt es auch nicht rotationssymmetrische Gleichdicke, wie etwa die Meissnerschen Körper, die in [6] abgebildet sind. Das 3-dimensionale Gleichdick minimalen Volumens ist übrigens bis heute unbekannt. Wenn man es unter der Nebenbedingung von Rotationssymmetrie sucht, so liegt es nahe, das rotierte Reuleaux-Dreieck als volumenminimales Gleichdick zu vermuten. Ein Beweis dieser modifizierten Vermutung wurde erst kürzlich in [10] erbracht. Der oben erwähnte Satz von Barbier hat in mehr als zwei Dimensionen kein natürliches Analogon (*alle n-dim. Gleichdicke gegebener Dicke d haben gleiche $(n-1)$-dim. Oberfläche*), denn die zweidimensionale Oberfläche eines dreidimensionalen Gleichdicks (in [7] auch Sphäroforme genannt) von gegebener Dicke hängt explizit von seinem Volumen ab, siehe [5].

2.) Auch im folgenden Problem spielt uns die Anschauung einen Streich. Man denke sich eine geradlinige Wasserleitung unter einer Wiese verlegt, die man - ob aus edlen oder unedlen Motiven - freilegen und anzapfen möchte. Freundlicherweise gibt es eine Markierung, die uns anzeigt, daß die Leitung im Abstand von höchstens einem Meter vom Markierungspunkt verläuft. Wenn wir also einen Kreis mit Radius 1 um den Markierungspunkt graben, dann finden wir die Leitung auf jeden Fall. Aber wer gräbt schon gerne lange Gräben? Kurzes Nachdenken bringt uns auf folgenden Sachverhalt. Wenn wir entlang einer irgendwie gearteten

Kurve K graben, so spüren wir dadurch alle Leitungen auf, die durch die konvexe Hülle $conv(K)$ verlaufen. Da unser Kreisgebiet D strikt konvex ist, sollten alle Randpunkte (als Extremalpunkte eines konvexen Gebietes) in K enthalten sein. Oder etwa nicht? Diese Vermutung wurde jedenfalls auf der Tagung "General Inequalities VII" 1995 in Oberwolfach geäußert, nachdem ich dort eine unkonventionelle Lösung für ein Quadrat (statt eines Kreises) als Suchgebiet angegeben hatte. In Bild 5 sehen wir eine Lösung, die statt eines Grabens der Länge 2π einen solchen der Länge $2 + \pi$ aufweist. Es gibt auch kürzere Graben mit mehr als einer Zusammenhangskomponente; der hier gezeigte ist jedoch unter allen einfach zusammenhängenden, als Graph darstellbaren Gräben minimal. Er findet sich beispielsweise in [39] und wird dort Sherlock Holmes zugeschrieben.

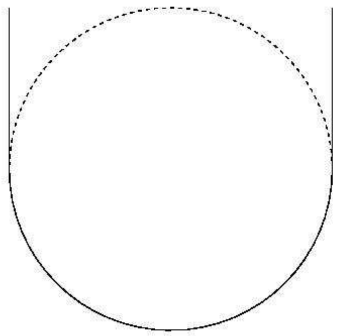

Bild 5: Effektives Graben

Man mag die in Bild 5 gezeigte Lösung als unsportlich empfinden. Schließlich wird über den Kreis D hinausgegraben, und das wird einen stolzen Gartenbesitzer zu Recht ärgern. Es geht nämlich auch anders. In Bild 6 sehen wir, wie man einen relativ kurzen Graben innerhalb eines regelmäßigen N–Ecks legen kann, um eine gerade Wasserleitung durch das N–Eck aufzuspüren. Dabei ist C_{i+1} das Lot von P_{i+1} auf die Strecke $\overline{P_N P_0}$. Wenn man ein wenig Trigonometrie benutzt und N gegen Unendlich schickt, ensteht ein Graben, der aus abzählbar vielen Stücken besteht, nämlich aus einen Halbkreis der Länge π und einer Reihe kurzer Grabenstücke, deren Länge sich zu 2 aufaddiert. Für die Rechnung verweise ich auf [26].

Mathematisch führt dies auf ein durchaus anspruchsvolles Problem. Unter allen Mengen C von eindimensionalem Hausdorffmaß suchen wir unter einer geometrischen Nebenbedingung diejenige, für welche $\mathcal{H}^1(C)$ minimal wird. Sofern dabei zugleich eine endliche Schranke an die Zahl der Zusammenhangskomponenten vorgegeben wird, hat dieses Variationsproblem eine Lösung, d.h. es liegt ein Minimum vor, siehe [18]. Bei abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten kann der Effekt auftreten, daß eine Minimalfolge C_i von Kurven zwar im Hausdorffsinne gegen eine Grenzkurve C_∞ konvergiert, doch daß $\mathcal{H}^1(C_\infty) > \lim_{i\to\infty} \mathcal{H}^1(C_i)$ ausfällt. Dann liegt nur ein Infimum vor, und das ist in Bild 6 der Fall.

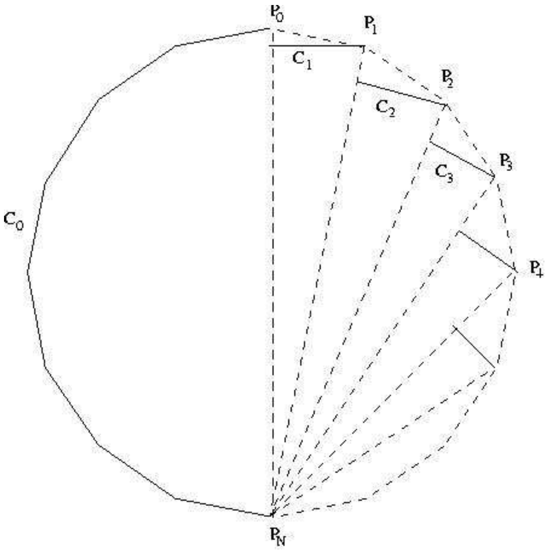

Bild 6: Effektives Graben innerhalb des Kreises

Wenn wir entlang der in Bild 6 gezeigten Kurve senkrechte Mauern errichten, so wirft das entstandene Gebilde in jede Richtung einen annähernd gleichen Schatten. Daher spricht man auch vom "opaque circle". Aus der Entfernung würde man es für eine kreisrunde Säule halten. Damit wären wir wieder beim Titel des Vortrages.

3.) Während ich unter 1) und 2) nichtsymmetrische Phänomene aufgezeigt habe, geht es im folgenden Beispiel um Symmetrie und Nichtsymmetrie. Unter allen Funktionen $v \in W_0^{1,p}(-1,1)$ mit Mittelwert $\int_{-1}^{1} v(x)dx = 0$ suchen wir diejenige, welche den Ausdruck

$$R(v;-1,1) = \frac{||v'||_{L^p(-1,1)}}{||v||_{L^q(-1,1)}}$$

minimiert. Hierbei seien $p > 1$ und $q > 1$. Statt Funktionen mit Randwert Null können wir auch periodische Funktionen ansetzen, das führt auf die in [21, 13, 15] behandelte äquivalente Fragestellung nach der optimalen Konstanten C_{pq} in Wirtingers Ungleichung

$$\left\{ \int_{-1}^{1} |v'|^q \, dx \right\}^{1/q} \leq C_{pq} \left\{ \int_{-1}^{1} |v'|^p \, dx \right\}^{1/p} . \tag{3}$$

Die explizite Kenntnis solcher Konstanten ist in der Numerik bei konkreten Fehlerabschätzungen von großer Bedeutung. Sei u eine Funktion, für welche (3) zur Gleichung wird, d.h. welche den Rayleigh Quotienten $||v'||_p/||v||_q$ unter allen zulässigen Funktionen minimiert. Dann kann man mit Hilfe von Umarrangieren [25] zeigen, daß u genau eine Nullstelle $a \in (0,1]$ besitzt, und daß die Funktionen $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$ bzw. $u_-(x) = \min\{u(x), 0\}$ symmetrisch fallend bzw. symmetrisch steigend auf ihrem Träger sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $[-1, a]$ der Träger von u_+. Falls $a = 0$ sein sollte, und dies trifft beispielsweise für $p = q = 2$ zu, so ist u ungerade, d.h. $u(-x) = -u(x)$. In diesem Falle sprechen wir davon, daß das Minimierungsproblem eine *symmetrische Lösung* besitzt. Symmetrische Lösungen konnte man bisher [21, 13, 15] für $q \leq 2p$ nachweisen, nichtsymmetrische Lösungen hingegen für $q > 4p - 1$, siehe [15]. Marino Belloni und mir glückte kürzlich der Nachweis der Symmetrie für $q \leq 2p+1$. Für $p = 2$ treffen die Schranken $2p + 1$ und $4p - 1$ zusammen. Für allgemeines $p > 1$ ist die Frage, bei welchem $q \in [2p + 1, 4p - 1]$ Symmetriebrechung auftritt, noch ungeklärt.

Für den Extremfall $q = \infty$ läßt sich die Nichtsymmetrie folgendermaßen einsehen. Zunächst überzeugt man sich durch periodische Fortsetzung und Verschieben des Minimierers $u \in W_0^{1,p}(-1, 1)$ (mit $\int_{-1}^{1} u(x)dx = 0$) von $R(v; -1, 1)$ davon, daß u zugleich $R(v; 0, 1)$ über alle $v \in W^{1,p}(0, 1)$ mit $\int_{-1}^{1} v(x)dx = 0$ minimiert. Man beachte, daß der Randwert Null jetzt aufgegeben ist. Also suchen wir nun eine Lösung des modifizierten Problems wie folgt. Die Beweisidee stammt von Talenti. Für jede Funktion u gilt $u(x) = c + \int_0^x u'(t)\ dt$ mit einer geeigneten Konstanten c. Wenn $\int_0^1 u(t)\ dt = 0$ sein soll, so muß

$$c = -\int_0^1 \int_0^x u'(t)\ dt\ dx = -\int_0^1 \int_t^1\ dx\ u'(t)\ dt = -\int_0^1 (1-t)\ u'(t)\ dt$$

gelten. Mithin ist

$$u(x) = \int_0^x t\ u'(t)\ dt + \int_x^1 (t-1)\ u'(t)\ dt = \int_0^1\ K(x,t)\ u'(t)\ dt,$$

wobei

$$K(x,t) = \begin{cases} t & \text{if } t < x, \\ t-1 & \text{if } t > x. \end{cases}$$

Wenn wir u dem Betrage nach durch $\int u'^2$ abschätzen wollen, so quadrieren wir die obige Darstellungsformel und wenden die Schwarzsche Ungleichung an.

$$\max_x u^2 = \max_x \left(\int_0^1\ K(x,t)\ u'(t)\ dt \right)^2 \leq \max_x \int_0^1\ K(x,t)^2\ dt \cdot \int_0^1\ u'(t)^2\ dt.$$

Doch $\int_0^1\ K(x,t)^2\ dt = (1 - 3x + 3x^2)/3 \leq 1/3$, so daß $C_{2,\infty} = 1/3$ und

$$\max_x u^2 \leq \frac{1}{3} \int_{-1}^1\ u'(t)^2\ dt$$

gilt. Gleichheit gilt hierbei dann und nur dann wenn $u'(t) = const.K(1,t)$ oder $u'(t) = const.K(0,t)$ gilt, d.h. wenn $u'(t) = t$ oder $u'(t) = (1-t)$ gelten. Damit wäre $u(t) = (3t^2 - 1)/6$ oder $u(t) = (3(1-t)^2 - 1)/6$ mit Nullstellen bei $\sqrt{3}$ oder $1 - \sqrt{3}$. Im symmetrischen Fall müßte die Nullstelle von u jedoch bei $1/2$ liegen. Damit ist der Fall $q = \infty$ abgeschlossen.

Es ist übrigens interessant, wie Egorov für $q > 4p - 1$ beweist, daß Minimierer von $R(v; -1, 1)$ unsymmetrisch sind. Er baut sich eine obere Schranke $G(v)$ für $R(v; -1, 1)$ auf einer Teilmenge von zulässigen Funktionen und zeigt, daß bei Vorliegen von Symmetrie die Infima von G und R übereinstimmen müssen, daß aber zugleich die zweite Variation von G negativ ist, sofern $q > 4p - 1$. Damit kann der Minimierer von R nicht symmetrisch sein. Die obere Schranke ist übrigens, wie Belloni und ich nachweisen konnten, konvex, sofern $q \leq 4p - 1$ ist, und tangiert R in symmetrischen Funktionen. Doch diese Information besagt wenig über das globale Verhalten von R und dessen Minimierer.

4.) Herr Walter ist unter Mathematikern als Experte für das Maximumprinzip in den partiellen Differentialgleichungen bekannt. Dieses Prinzip läßt sich, wie könnte es anders sein, einsetzen, um nachzuweisen, daß ein Gebilde rund ist. Eines der einfachsten Probleme in den partiellen Differentialgleichungen ist das sogenannte Torsionsproblem

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{4}$$

Dabei kann man sich unter $\Omega \subset I\!R^2$ den Querschnitt eines unter Torsion stehenden linear elastischen Stabes vorstellen. Die Funktion $|\nabla u|$ gibt dann den Betrag der Spannungen im Stab wieder. Die meisten der Zuhörer werden sich erinnern, daß aus dem Maximumprinzip die Aussage $u > 0$ im Inneren von Ω folgt. Wir können uns den Graphen von u also als Berg vorstellen. Wenn Ω Symmetrien aufweist, so erwarten wir diese Symmetrien auch von der Lösung u. Sei etwa Ω symmetrisch bezüglich x_1 in der (x_1, x_2)–Ebene, dann ist $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$, wie man zum Beispiel anhand der Eindeutigkeit von u ersehen kann. Wo treten im Stab maximale Spannungen auf? Diese Frage beschäftigte schon Saint Venant 1856 [37], und wenn man die Ungleichung $-\Delta(|\nabla u^2|) \leq 0$ berechnet hat, dann folgt aus dem Maximumprinzip, daß die Maximalspannungen am Rande des Gebietes auftauchen müssen, ein Resultat, welches erst 1930 von Polya [32] bewiesen wurde.

Wenn wir jetzt zusätzlich zu (4) durch geeigneten Entwurf von Ω die Spannungen am Rande des Stabes möglichst gleichmäßig verteilen wollen, dann läuft dies auf das überbestimmte Randwertproblem (4) (5) hinaus

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha = const. \tag{5}$$

Dieses Problem hat sicher eine Lösung, wenn Ω ein Kreis ist. Ist es die einzige Lösung? Die Antwort ist positiv, wie Serrin in einer berühmten Arbeit 1971 nachwies. Serrin zeigte sogar noch mehr. Wenn man von einem Gebiet wie in Bild 7 eine Kappe abschneidet und die reflektierte Kappe noch in das ursprüngliche Gebiet hineinpaßt, dann ist die Richtungsableitung von u vom Rande $\partial\Omega$ orthogonal zur Schnittlinie hin echt positiv. Dieses technische Hilfsmittel wurde später unter dem Namen “moving plane–Methode” bekannt, siehe [23].

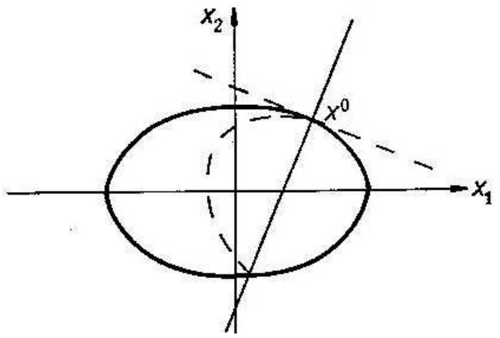

Bild 7: Zur Methode der moving planes

Natürlich hat auch Herr Walter seine Schüler auf diese Methode hingewiesen, und erst vor kurzer Zeit hat sein Doktorand Reichel mit ihr eine Reihe schöner Resultate erzielt, z.B. den folgenden

Satz 1: *Das überbestimmte Randwertproblem ($N \geq 3$)*

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \kappa u \qquad \textit{in} \;\; \Omega = I\!R^N \setminus G, \\
u = c_0 \quad \textit{und} \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = \cot\gamma \qquad \textit{auf} \;\; \partial G, \\
\textit{sowie} \qquad 0 < u < c_0 \quad \text{in } \Omega,
\end{gathered}$$

hat nur dann eine Lösung, wenn G eine Kugel ist.

Statt der Kapillarflächengleichung sind andere elliptische Gleichungen möglich, z.B. $\Delta u = 0$ in Ω, dann löst der Satz eine Vermutung von Gruber, siehe [34, 35].

Es lassen sich mit der moving plane–Methode aber auch Aussagen über Lösungen von (4) und verwandten (nichtlinearen elliptischen) Gleichungen auf anderen Gebieten als Kreisen oder Kugeln herleiten. Wenn etwa Ω konvex und symmetrisch in x_1 Richtung ist, wie in Bild 7, so ist $\partial u/\partial x_1 < 0$ für $x_1 > 0$, das heißt u ist symmetrisch fallend in x_1. Bild 7 enthält aber auch eine Gerade durch x^0, die in x^0 senkrecht auf $\partial\Omega$ steht. Wenn wir mit t diejenige Richtung bezeichnen, die von x^0 tangential zu $\partial\Omega$ in Richtung der reflektierten Kappe weist, so ist $\partial u/\partial t > 0$ in der ursprünglichen, rechts liegenden Kappe, aber $\partial u/\partial t(x^0) = 0$. Mithin ist

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x^0) \leq 0. \tag{6}$$

Relation (6) läßt sich umformen. Sei s die Bogenlänge von $\partial\Omega$, orientiert von x^0 zur x_2-Achse hin. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x^0) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(x^0) + \kappa(x^0)\frac{\partial u}{\partial s}(x^0) \leq 0,$$

wobei κ die Krümmung von $\partial\Omega$ bezeichnet, und da $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ entlang $\partial\Omega$ ist, haben wir

$$\frac{\partial}{\partial s}(|\nabla u|^2) = 2\frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \geq 0. \tag{7}$$

Damit ist nachgewiesen, daß bei ellipsenähnlichen Gebilden der Punkt maximaler Belastung unter Torsion an den Randpunkten auftritt, in denen das Gebiet am dünnsten ist. Unter einem ellipsenähnlichen Gebiet verstehe ich ein konvexes ebenes Gebiet, welches symmetrisch bezüglich beider Achsen ist, und dessen Randkrümmung im ersten Quadranten von rechts nach links abnimmt. Diese Krümmungsbedingung stellt sicher, daß die reflektierten Kappen stets in Ω liegen, sofern x_0 den Rand im ersten Quadranten durchläuft. Ohne eine solche Krümmungsbedingung ist die äquivalente Aussage falsch, daß die Punkte maximaler Belastung dort auftreten, wo Ω am dünnsten ist. Bild 8 war schon Navier (1864) bekannt. Die Punkte maximaler Belastung sind mit F bezeichnet, und ein paar Höhenlinien von u sind ebenfalls eingezeichnet.

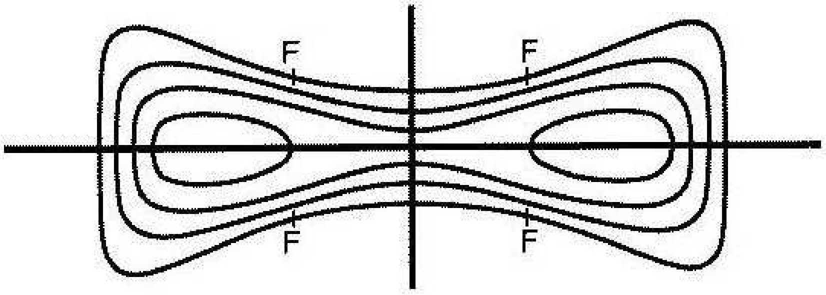

Bild 8: Zur Torsion einer Schiene

Ein interessanter Beweisversuch für ellipsenähnliche Gebiete findet sich übrigens 1871 bei bei Boussinesq [8]. Er argumentiert, daß die Niveaumengen von u dann offensichtlich konvex seien. Da man vom Maximum von u im Nullpunkt sowohl entlang der x_1 als auch entlang der x_2-Achse auf Null absteigt, den Rand $\partial\Omega$ aber entlang der x_2-Achse früher trifft, muß u dort steiler, d.h. $|\nabla u|$ größer sein. Mehr über dieses Problem, insbesondere über Verallgemeinerungen auf quasilineare Gleichungen, findet sich in [24].

5.) Ein alternativer Beweis dafür, daß das überbestimmte Problem (4)(5) nur auf Kreis bzw. Kugel eine Lösung haben kann, wurde in [41] von Weinberger gegeben und gibt mir Gelegenheit, über sogenannte *isoparametrische Flächen* zu berichten. Weinberger zeigte zunächst, daß für Lösungen von (4)(5) auch

$$|\nabla u|^2 = \alpha^2 - \frac{2}{N}u \qquad \text{in } \Omega \tag{8}$$

gelten muß. Man beachte, daß die Funktion u nunmehr zwei autonome Differentialgleichungen gleichzeitig löst, nämlich (4) und (8). Ausgehend von (8) konnte

Weinberger dann die Radialsymmetrie von u beweisen. Es geht jedoch auch eleganter, wenn man bereit ist, den folgenden Satz als gegeben zu betrachten, der gerne wiederentdeckt wird, z.B. in [33].

Satz 2: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein zusammenhängendes Gebiet und $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ klassische Lösung des folgenden Systems von partiellen Differentialgleichungen*

$$\Delta u = f(u) \qquad \textit{und} \qquad |\nabla u| = g(u) \qquad \textit{in } \ \Omega. \tag{9}$$

Ferner seien g und f differenzierbar und $g \neq 0$.
Dann sind die Niveaumengen von u für $N = 2$ Kreisscheiben oder Halbebenen, für $N = 3$ Kugeln, Zylinder oder Halbräume und für allgemeines $N \geq 3$ Produkte vom Typ $\mathbb{R}^j \times B$, wobei B eine Kugel ist.

Statt des Laplaceoperators in (9) sind übrigens auch andere (nicht einmal elliptische) Differentialoperatoren zweiter Ordnung zulässig [27]. Man fragt sich natürlich, ob zwei partielle Differentialgleichungen für ein und dieselbe Funktion nicht eine etwas gewagte Forderung darstellen. Doch sie läßt sich öfter als man denkt erfüllen. Aus (4) und (5) folgerte Weinberger (8) und damit die zweite Gleichung von (9).

Ein zweites Beispiel findet sich in folgendem alternativen Beweis der oben erwähnten Vermutung von Gruber, siehe [31]. Sei G ein einfach zusammenhängendes konvexes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ und $N \geq 3$. Sei u Lösung des überbestimmten Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u = 0 \qquad &\textit{und} \qquad 0 < u < 1 \qquad \textit{in } \Omega := \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}, \\ u = 1 \qquad &\textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha \neq 0 \qquad \textit{auf } \partial G. \end{aligned}$$

Dann konnten Mendez und Reichel in [31] zunächst nachweisen, daß die Funktion $P(x) = |\nabla u(x)|^2 \ u(x)^{(2-2N)/(N-2)}$ konstant in Ω sein muß. Daraus konnten sie dann herleiten, daß G nur eine Kugel sein kann. Die Konstanz von P liefert uns die zweite Gleichung in (9) und damit die Kugelgestalt von G auf anderem Wege.

Zwei weitere Beispiele mögen illustrieren, daß Satz 2 mindestens drei interessante Anwendungen hat. In [14] stellte De Giorgi das folgende Problem. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ Lösung von

$$\Delta u = u^3 - u, \qquad |u| \leq 1 \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_N} > 0 \qquad \textit{in } \mathbb{R}^N.$$

Trifft es dann zu, daß die Niveauflächen $\{ \ x \in \mathbb{R}^N \ ; \ u(x) = \lambda \ \}$ für alle $\lambda \in (-1, 1)$ parallele Hyperebenen sind? Unter einer technischen Zusatzvoraussetzung konnte diese Frage in [10] von Caffarelli, Garofalo und Segala, bzw. in [12] von Xinfu Chen positiv beantwortet werden. Beide wiesen nämlich zunächst nach, daß die Funktion $P(x) = 2|\nabla u(x)|^2 - (1 - u(x)^2)^2$ konstant sein muß und leiteten daraus mit anderen Argumenten die Eindimensionalität von u her. Satz 2 hätte es an dieser Stelle auch getan.

Schließlich bietet sich Satz 2 zum Beweis der folgenden Aussage in [3] an, wo überbestimmte Randwertprobleme auf unbeschränkten Gebieten studiert werden, und wo man unter geeigneten Voraussetzungen zu dem Schluß kommt, daß Ω ein Halbraum sein muß. Auf Seite 1110 schreiben Berestycki, Caffarelli und Nirenberg "It is tempting to conjecture that a much more general result is true. Assuming that Ω is a smooth domain with Ω^c connected and that there exists a bounded positive solution u of"

$$\begin{aligned} \Delta u + f(u) = 0, \qquad &\text{and} \qquad u > 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u = 0 \qquad &\text{and} \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha = const. \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{10}$$

"for some Lipschitz function f, then Ω is either a half-space, a ball, the complement of a ball or a circular-cylinder type of domain: $\mathbb{R}^j \times B$ with B a ball."

Wie so oft in der Mathematik wirft die Lösung eines Problemes auch an dieser Stelle neue Fragen auf. Welches P ist für (10) zu wählen? Ich persönlich tippe auf $P(x) = g(u(x)\{|\nabla u(x)|^2 + \beta(j)F(u(x))\}$, wobei $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ und β eine geeignete Konstante ist.

Abschließend darf ich zusammenfassen, daß nicht alles, was rund zu sein scheint, auch rund sein muß. Über eines besteht jedoch kein Zweifel: Ihr 70. Geburtstag, Herr Walter, ist eine runde Sache.

PS.: Ich danke meinen Kollegen G.Warnecke (Magdeburg) für den Hinweis auf [19], W.Henke (Köln) für den Hinweis auf den Satz von Barbier [1] und G.Thorbergsson (Köln) für den Hinweis auf isoparametrische Flächen.

Literaturangaben

[1] Barbier,E. Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. J. Math. Pures Appl. Ser. 2 **5** (1860) p. 273–286.

[2] Belloni,M. & B.Kawohl: On a symmetry question related to Poincaré's inequality, in Vorbereitung

[3] Berestycki,H., L.Caffarelli & L.Nirenberg: Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains. Comm. Pure Appl. Math **50** (1997) p. 1089-1111.

[4] Blaschke,W.: Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und p. kleinsten Inhalts. Math. Ann. **76** (1915) p. 504–513.

[5] Blaschke,W.: Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite. Ber. Verh. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. **67** (1915) p. 290–297.

[6] Böhm,J. & E.Quaisser: *Sphäroformen und symmetrische Körper.* Akademie Verlag, Berlin (1991)
[7] Bonnesen,T. & W.Fenchel, *Theorie der konvexen Körper.* Chelsea Publ., New York (1948)
[8] Boussinesq, J.: Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques dont certaines dimensions sont très-petit per rapport à d'autres. *J. Math. Pures Appl.* 16 (1871) 125-274.
[9] Caffarelli,L., N.Garofalo & F.Segala: A gradient bound for entire solutions of quasiliniear equations and its consequences. Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994) p. 1457-1473.
[10] Campi,S., Colesanti,A. & P.Gronchi: Minimum problems for volumes of convex bodies. in: *Partial differential equations and applications.* Eds.: P.Marcellini, G. Talenti, E.Visintin, Marcel Decker, New York (1996) p. 43–55.
[11] Chakerian,G.D. & H.Groemer: Convex bodies of constant width, in *Convexity and its Applications.* Eds.: P.M.Gruber, J.M.Wills, Birkhäuser, Basel (1983) p. 49–96.
[12] Chen,X.: Global asymptotic limit of solutions to the Cahn Hilliard equation, J. Differ. Geom. **44** (1996) p.262–311.
[13] B.Dacorogna, W.Gangbo & N.Subia: Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger, Ann. Inst. Henri Poinc. Analyse Nonlin. **9** (1992) p. 29–50.
[14] De Giorgi,E.: Convergence problems for functions and operators. in: *Recent Methods in Nonlinear Analysis*, Eds: E.De Giorgi, E.Magenes & U.Mosco; Pitagora Editrice, Bologna (1979) p. 131–188.
[15] Y.V.Egorov, On a Kondratiev problem. C. R Acad. Sci. Paris, Ser. I, **324** (1997) p. 503–507.
[16] Euler,L.: De curvis triangularibus. Acta Acad. Sci. Imp. Petropolitanae (1778) II p. 3–30.
[17] Evans,L.C. & R.F.Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, Boca Raton (1992)
[18] Faber,V. & V.Mycielski: The shortest curve that meets all the lines that meet a convex body. Amer. Math. Monthly **93** (1986) p. 796–801.
[19] Feynman,R.: *"Kümmert Sie was andere Leute denken?" Neue Abenteuer eines neugierigen Physikers.* Piper Verlag, München (1996)
[20] Fujiwara,M.: Analytical proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area I, II. Proc. Imp. Acad. Japan **3** (1927) p. 307–309 und **7** (1931) p. 300–302.
[21] Gangbo,W.: Problemes non convexes du calcul des variations. Dissertation 1038 (1992) EPF Lausanne
[22] Ghandehari,M.: An optimal control formulation of the Blaschke-Lebesgue Theorem. J. Math. Anal. Appl. **200** (1996) p. 322–331.
[23] Gidas,B., Ni,W.M. & L.Nirenberg: Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm. Math. Phys. **68** (1979) p.209–243
[24] Kawohl,B.: On the location of maxima of the gradient for solutions to quasilinear elliptic problems and a problem raised by Saint Venant. Journal of

Elasticity **17** (1987) p. 195–206.
[25] Kawohl,B.: On the simple shape of stable equilibria, in: Geometry of solutions to Partial Differential Equations. Ed.: G.Talenti. Symposia Math. **XXX**, Acad. Press, London (1989) p. 73–87.
[26] Kawohl,B.: The opaque square and the opaque circle, in: General Inequalities VII, Int. Ser. Numer. Math. **123** (1997) p. 339–346.
[27] Kawohl,B.: Solutions to overdetermined problems have simple shape, Manuskript (1997)
[28] Klötzler,R.: Beweis einer Vermutung über n-Orbiformen kleinsten Inhalts. Z. Angew. Math. Mech. **55** (1975) p. 557–570.
[29] Lebesgue,H.: Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul de variations. J. Math. Pures Appl. (8) **4** (1921) p. 67–96.
[30] Littlewood,J.E.: *A Mathematician's Miscellany.* Methuan & Co. Ltd., London (1953)
[31] Mendez,O. & W.Reichel, Electrostatic representation of spheres. Manuscript 1998
[32] Polya,G.: Liegt die Stelle der größten Beanspruchung an der Oberfläche? Zeitschr. Angew. Math. Mech. **10** (1930) p. 353–360.
[33] Pucci,P.: An overdetermined system, Quarterly Appl. Math. **41** (1983) p. 365–367.
[34] Reichel, W.: Radial symmetry for an electrostatic, a capillarity and some fully nonlinear overdetermined problems on exterior domains. J. Anal. Appl. **15** (1996) p. 619–635
[35] Reichel, W.: Radial symmetry for elliptic boundary value problems on exterior domains. Arch. Ration. Mech. Anal. **137** (1997) p. 381–394
[36] Reuleaux,F.: *Theoretische Kinematik, Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens.* Vieweg, Braunschweig (1875)
[37] Saint Venant, B. de: Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre interieur des solides élastiques en général, et de formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exercant simultanement. Memoirs présentés par divers savant a l'académie de sciences de l'institut impérial de France, 2. Ser. 14 (1856) 233-560.
[38] Serrin,J.: A symmetry problem in potential theory. Arch. Ration. Mech. Anal. **43** (1971) p. 304–318.
[39] Stewart,I.: The great drain robbery, Scientific American, (Sept. 1995) p. 166–167.
[40] Talenti,G.: persönliche Mitteilung, 30.8.96
[41] Weinberger,H.: Remark on the preceding paper of Serrin, Arch. Ration. Mech. Anal. **43** (1971) p. 319–320.

Anschrift des Autors: Mathematisches Institut, Universität zu Köln, D 50923 Köln
e-mail: kawohl@mi.uni-koeln.de