GEOMETRIE

Räumliche Gleichdicke

Manche Körper lassen sich – theoretisch – in Kugellagern nutzen, ohne Kugeln zu sein. Die Aufgabe, solche räumlichen Gebilde mit möglichst kleinem Volumen zu finden, führt zu einem merkwürdigen Phänomen. Physiker würden es einen entarteten Grundzustand nennen.

VON CHRISTOPH PÖPPE

Wenn man einen Kreis zwischen zwei parallele Geraden einklemmt, dann ist der Abstand zwischen ihnen stets derselbe, einerlei wie der Kreis orientiert ist. Das wussten schon die ägyptischen Pyramidenbauer: Ein schwerer Steinquader lässt sich mit Hilfe kreisrunder Rollen über ebenen Untergrund transportieren, ohne sich auf- und abzubewegen.

Gilt das auch umgekehrt? Wenn der Steinklotz nicht auf- und abschwankt, können wir dann sicher sein, dass die Rolle einen kreisförmigen Querschnitt hat? Eben nicht! An Stelle des Kreises tut es auch ein so genanntes Reuleaux-Dreieck (Bild unten, links). Es entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck, indem man in jede seiner Ecken einen Zirkel einsticht und die beiden jeweils anderen Ecken durch einen Kreisbogen verbindet.

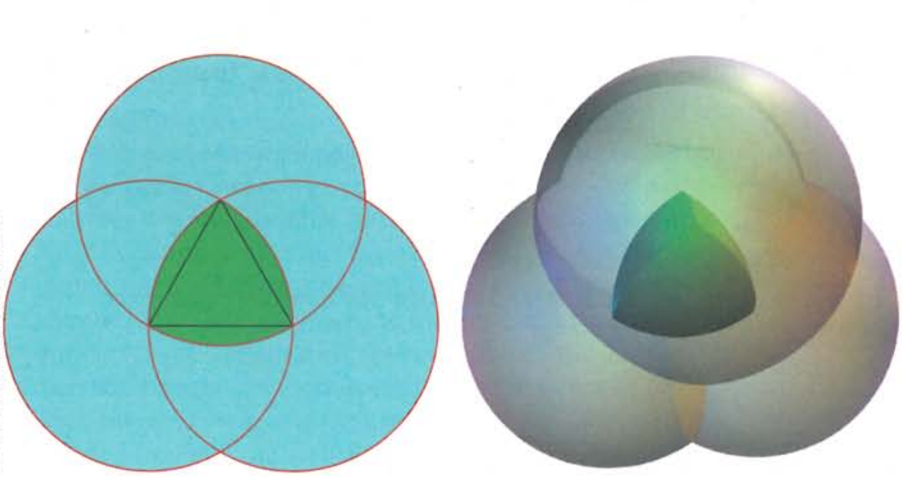
Die Mathematiker nennen den Abstand zweier paralleler, dicht an der Kurve anliegender Geraden eine »Dicke« dieser Kurve, obgleich man normalerweise eher von der Dicke (oder Breite) der Fläche sprechen würde, die von der Kurve eingeschlossen wird. Je nach der Orientierung der Geraden kann ein und dieselbe geschlossene Kurve unterschiedliche Dicken aufweisen. Wenn sie in jeder Richtung gleich dick ist, nennt man sie eine Kurve konstanter Dicke, kurz »Gleichdick-Kurve« oder auch »Gleichdick«. Weitere Gleichdicke entstehen durch die entsprechende Konstruktion aus regelmäßigen Vielecken mit fünf, sieben oder allgemein einer beliebigen ungeraden Anzahl von Seiten.

Gleich dick heißt nicht kreisrund

Wer also nachprüfen will, ob ein großes Gefäß kreisrund ist, darf sich nicht damit begnügen, seine Dicke in verschiedenen Richtungen zu vermessen. Diese simple Weisheit hatte sich offensichtlich nicht bis zu den Betreibern der Raumfähre »Challenger« herumgesprochen. Die hatten nämlich durch derartige Dickemessungen nachgeprüft, ob ein Raketentreibstoffbehälter nach dem Raumflug und der Bergung aus dem Meer seine kreisförmige Gestalt behalten hatte. Nach positivem Ausgang der Tests setzten sie zwei derartige Behälter zusammen und dichteten die Fuge zwischen ihnen mit einem dicken kreisförmigen Gummiring, einem »O-Ring«, ab. Aus dieser Fuge schoss beim nächsten Flug der »Challenger« am 28. Januar 1986 Treibstoff heraus, mit den bekannten katastrophalen Folgen.

Kurz nach dem Start dehnen sich beide Behälter aus, und der O-Ring muss sich mitdehnen, damit die Fuge dicht bleibt. Nach dem Ergebnis der umfangreichen Untersuchungen nach dem Unglück hatte der Ring diese Bewegung nicht rechtzeitig vollführt, weil er wegen der Kälte in der Nacht zuvor gefroren und daher zu träge war. Möglicherweise war der Gummiring außerdem an der Bewegung gehindert, weil er zwischen den nicht perfekt kreisrunden Teilen verklemmt war.

LINKS: CHRISTOPH PÖPPE; RECHTS: STIAN ELLINGSEN / CC-BY-SA-3.0 (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY-SA/3.0)



Das Reuleaux-Dreieck (links), benannt nach Franz Reuleaux (1829–1905), dem »Vater des wissenschaftlichen Maschinenbaus«, besteht aus allen Punkten, die drei Kreisen gemeinsam sind (dem »Durchschnitt« dieser Kreise). Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, und ihr Radius ist gleich dessen Seitenlänge. Entsprechend ist das Reuleaux-Tetraeder (rechts) der Durchschnitt von vier Kugeln mit Mittelpunkten in den Ecken eines regelmäßigen Tetraeders und dem Radius gleich dessen Kantenlänge.

Diese Gleichdicke sind alles andere als kugelrund – funktionieren aber wie Kugellager. Die Plexiglasplatte (oben im Bild) ist der Unterbau eines »Schlittens«. Während die Besucher des New Yorker Museum of Mathematics (»MoMath«) schwungvoll und erschütterungsfrei bergab gleiten, bleibt die Platte stets in Kontakt mit den merkwürdig geformten Gebilden.

MOMATH – NATIONAL MUSEUM OF MATHEMATICS, NEW YORK

Hätten die Verantwortlichen nur die »Mathematical Games« des legendären Martin Gardner gelesen! Schon 1963 schrieb er im »Scientific American« über Kurven konstanter Dicke und wusste zu berichten, dass man die richtige Form einer U-Boot-Hülle nicht durch Dickemessungen, sondern durch Anlegen kreisförmiger Schablonen zu ermitteln hat.

Für die antiken Steintransporteure hätten Rollen mit dem Querschnitt eines Reuleaux-Dreiecks zumindest einen Vorteil gehabt: Sie sind leichter als kreisrunde, sogar die leichtesten überhaupt möglichen (wenn man gleiches Material, gleiche Länge und so weiter unterstellt). Unter allen Kurven vorgegebener konstanter Dicke ist das Reuleaux-Dreieck diejenige mit dem kleinsten Flächeninhalt in ihrem Inneren. Es wäre also etwas weniger mühsam gewesen, die Rolle, die hinter dem Stein zum Vorschein kommt, nach vorne zu schleppen und wieder unter den wandernden Stein zu legen.

In der Praxis hätte eine derartige Leichtrolle jedoch erhebliche Nachteile. Das Reuleaux-Dreieck ist nicht überall schön rund; vielmehr treffen seine drei Kreisbögen unter einem Winkel von 60 Grad aufeinander – dort, wo auch das gewöhnliche Dreieck, aus dem es entstanden ist, seine Ecken hat. Beim Rollen liegt entweder eine solche Ecke auf dem Boden, während der gegenüberliegende Kreisbogen unter dem Stein abrollt, oder eine Ecke hat Kontakt mit dem Stein, und der zugehörige Kreisbogen bewegt sich wie ein Rad über die Erde. Oben oder unten – stets ist die ganze Last des Steins auf einen Punkt konzentriert. Kaum ein Material hält eine solch extreme Belastung auf die Dauer aus.

Dem könnte man entgegenwirken, indem man die Ecken etwas abrundet. Wieder entsteht ein Gleichdick, allerdings hat es – bei vorgegebener Dicke – nicht mehr minimale Fläche. Das beweist man »hinterrücks« mit einem typischen Widerspruchsargument.

Behauptung: Ein minimales Gleichdick muss Ecken haben, also Stellen, an denen eine Tangente an die Kurve nicht definiert ist und eine Krümmung erst recht nicht. Beweis: Von einer eckenlosen Gleichdick-Kurve könnte man eine dünne Schicht abschälen, und es wäre immer noch ein Gleichdick und hätte in jedem Punkt eine Krümmung. Durch Nachrechnen stellt sich heraus, dass das geschälte Gleichdick nach Rückvergrößerung auf die ursprüngliche Dicke immer noch eine kleinere Fläche hätte als das Original, also kann dieses nicht minimal gewesen sein: Widerspruch!

Minimieren durch Abschleifen

Mathematiker haben einen ziemlich speziellen Sinn für Ästhetik. Sie stellen sich die Lösung eines Minimierungsproblems perfekt symmetrisch und glatt, das heißt ohne jegliche Ecken und Kanten vor – und finden sich oft genug bestätigt. Die Figur minimalen Umfangs bei vorgeschriebenem Flächeninhalt ist der Kreis; der Zustand minimaler Energie einer Menge Wasser ist die spiegelglatte, ebene Seeoberfläche; Sterne und Planeten entledigen sich überschüssiger Gravitationsenergie so lange, bis sie Kugelform angenommen haben; der (energieärmste) Grundzustand des Elektrons im Wasserstoffatom ist eine perfekt kugelförmige Wahrscheinlichkeitswolke.

Irgendwelche Ecken und Kanten bieten normalerweise Gelegenheit, die zu minimierende Größe – Flächeninhalt, Energie und so weiter – noch kleiner zu machen, indem man das, was so unrund hervorsticht, ein bisschen glatt schleift. Das Problem »Minimiere die Fläche einer ebenen Figur bei vorgeschriebener Dicke« fällt also aus dem Rahmen. Abschleifen hilft zwar im Prinzip, aber der endgültige Erfolg stellt sich erst ein, wenn die Figur vor lauter Abschleifen nicht mehr glatt ist.

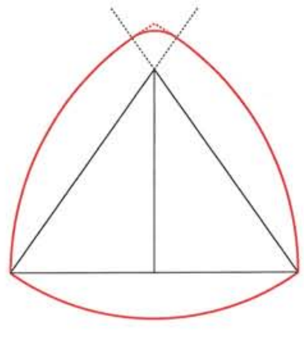
Wenn aber ein minimales Gleichdick schon unvermeidlich Ecken haben muss, dann sollen es wenigstens so wenig wie möglich sein. So erklärt sich die Anzahl 3.

In drei statt zwei Dimensionen steht es um die Abweichung von der perfekten Symmetrie noch schlimmer. Die Kugel ist ohne Zweifel ein Gleichdick, aber sie löst das Optimierungsproblem

Die vorsichtige Glättung des Reuleaux-Tetraeders

Die sechs Kanten eines (gewöhnlichen) regulären Tetraeders lassen sich zu drei Paaren gruppieren. Die beiden Partner jedes Paares liegen einander gegenüber, haben insbesondere keine Ecke gemeinsam. Verbindet man die Mittelpunkte beider Kanten miteinander, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf beiden.

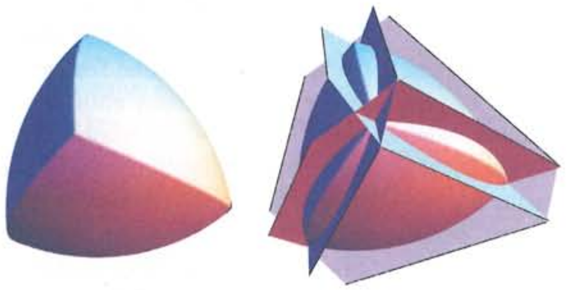
Man schiebe nun in Gedanken ein Tetraeder aus Brotteig in den Backofen. Dort geht es auf, bis daraus das Reuleaux-Tetraeder wird. (Bild unten, links; die Ecken des Tetraeders bleiben an ihren Plätzen.) Schneidet man nun mit dem Brotmesser entlang der Flächen des ursprünglichen Tetraeders, so fällt der gesamte Zuwachs ab, bestehend aus vier gerade abgeschnittenen Kugelkappen an den Flächen und sechs spitz zulaufenden Keilen an den Kanten (Bild unten, rechts). Ein Keil enthält die gebogene Kante (aus Brotkruste), an der zwei Kugelabschnitte aneinandergrenzen, eine gerade Kante (aus Brot), die mit der Kante des ursprünglichen Tetraeders zusammenfällt, sowie zwei »Schnittkanten«, an denen Brot und Kruste aneinandergrenzen, also die Schnittebene die Außenseite des Reuleaux-Tetraeders trifft.



CHRISTOPH PÖPPE

Meissners Rezept besteht nun darin, jeden zweiten Keil zu einer »Spindel« abzurunden. Die Prozedur betrifft von jedem Paar gegenüberliegender Kanten nur einen Partner. Dazu legt man ein bogenförmiges, unendlich dünnes Messer, eigentlich eher einen Schneidedraht, entlang einer Schnittkante an und schneidet damit durch den Keil in einer Rotationsbewegung, bei der das Messer in den Eckpunkten des Keils unbewegt bleibt. Am Ende kommt das Messer an der anderen Schnittkante wieder zum Vorschein. Im Querschnitt sieht das so aus, dass die beiden Bögen des Keils, die aus Brotkruste bestehen, durch ein einziges Stück Kreisbogen ersetzt werden, der tangential an den Rest der Brotkruste anschließt. Schließlich setzt man das Reuleaux-Tetraeder wieder so zusammen, wie es auseinandergeschnitten wurde.

Das Bild oben zeigt einen Querschnitt durch den ganzen Körper. Eine unversehrte Kante (unten) liegt genau in der (vertikalen) Schnittebene; die gegenüberliegende abgerundete Kante (oben; gestrichelt: die ursprüngliche Grenze des Reuleaux-Tetraeders) ist im Querschnitt zu sehen. Diese ebene Figur ist ein Gleichdick mit der richtigen Dicke. Da das für alle Querschnitte gilt, ist der gesamte Meissner-Körper ein räumliches Gleichdick.



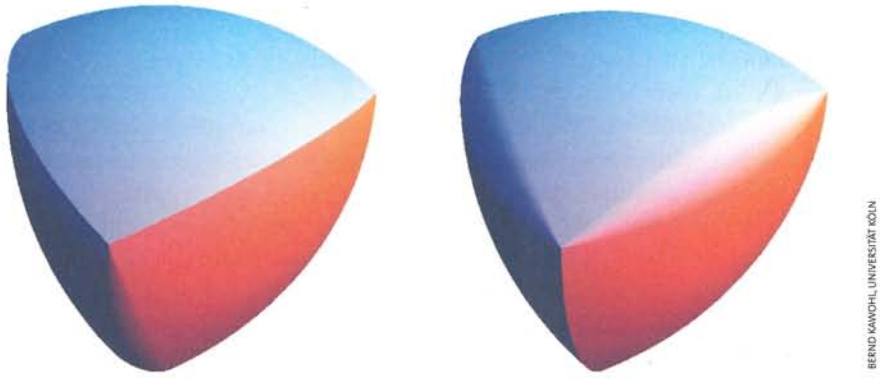
CHRISTOPH PÖPPE

mit umgekehrtem Vorzeichen: Unter allen Gleichdicken vorgeschriebener Dicke ist sie das »fetteste«, also das mit dem größten Volumen.

Wer schlanke Gleichdicke sucht, orientiert sich zweckmäßig am zweidimensionalen Vorbild. Man stelle ein Reuleaux-Dreieck in Gedanken aufrecht, mit einer Ecke nach oben, und drehe es um die vertikale Symmetrieachse. Das Volumen, das die zweidimensionale Figur dabei überstreicht, ist ein dreidimensionales Gleichdick. Das funktioniert allgemein: Nach diesem Drehbankverfahren kann man aus jedem zweidimensionalen Gleichdick, das eine Symmetrieachse hat, ein dreidimensionales machen.

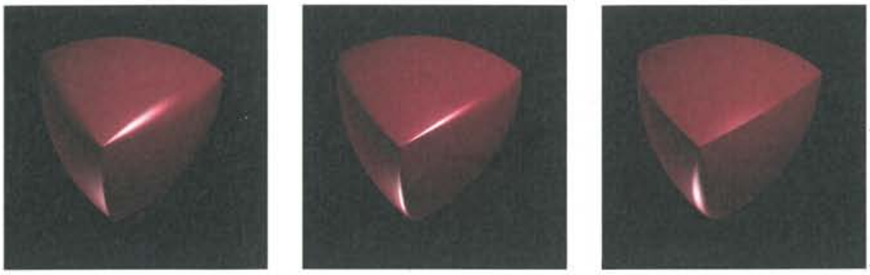
Aber es geht noch schlanker. Man setze an die Stelle des gleichseitigen Dreiecks dessen räumliches Pendant, das regelmäßige Tetraeder, das ist eine dreiseitige Pyramide aus vier gleichseitigen Dreiecken. Diesen Körper muss man wie sein ebenes Gegenstück »ausbeulen«, und zwar nicht mit Kreisbögen, sondern mit Kugelausschnitten.

Meissners minimale Gleichdicke auf Basis des Reuleaux-Tetraeders. Die abgerundeten Kanten treffen sich entweder in einem Eckpunkt (unten im linken Bild), oder sie begrenzen eine Fläche (oben im rechten Bild).



BERND KAWOHL, UNIVERSITÄT KÖLN

Der eine Meissner-Körper (links) geht über ein Kontinuum von Gleichdicken mit mehr oder weniger gerundeten Kanten (Mitte) in den anderen (rechts) über. Aber alle Zwischenstadien haben ein größeres Volumen als die Meissner-Körper.



ÉDOUARD OUDET, UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER, GRENOBLE

Die genaue Vorschrift lautet: Lege um jeden Eckpunkt des Tetraeders eine Kugel, die durch die übrigen drei Ecken geht – also muss der Kugelradius gleich der Kantenlänge des Tetraeders sein. Der gesuchte Körper besteht dann aus den Punkten, die allen vier Kugeln gemeinsam sind (Bild S. 70 unten, rechts).

Aber das ist noch kein Gleichdick! Im »Normalfall«, das heißt, wenn das Reuleaux-Tetraeder mit irgendeinem Punkt eines Kugelausschnitts auf dem Boden aufliegt und mit dem zugehörigen Eckpunkt an die Decke stößt oder umgekehrt, ist seine Dicke gleich dem Kugelradius; so ist es konstruiert. Wenn es aber mit einer Kante auf dem Boden steht und mit der gegenüberliegenden Kante die Decke berührt, ist es merklich dicker – ungefähr 2,5 Prozent.

Meissners mehrfaches Minimum

Was tun? Na ja – es bietet sich an, die Kanten ein bisschen abzuschleifen. Aber Vorsicht! Durch Abschleifen wird der Körper auch in Richtungen dünner, in denen er das gar nicht soll. Außerdem dürfen die Ecken und Kanten bei dieser Aktion nicht gänzlich verschwinden. Der Satz, dass ein überall wohlgerundetes Gleichdick nicht minimal sein kann, gilt auch in drei Dimensionen.

Die Lösung fand bereits vor reichlich 100 Jahren der Schweizer Mathematiker Ernst Meissner (1883–1939) – aber er konnte nicht beweisen, dass die von ihm gefundenen Körper minimal sind. Der Beweis steht bis heute aus, auch wenn an der Korrektheit der Aussage kein ernsthafter Zweifel mehr besteht. Bernd Kawohl, Mathematikprofessor an der Universität zu Köln und in dieser Zeitschrift schon als Erfinder des perfekten Sichtschutzes im Kleingarten in Erscheinung getreten (Spektrum der Wissenschaft 11/2003, S. 102), und Christof Weber, Dozent an der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz in Basel, haben Meissners alte Arbeit weitergetrieben. Einen Beweis für dessen Behauptung haben auch sie nicht gefunden, aber mehr als eine Million gute Gründe für ihre Korrektheit.

Die wesentliche Idee Meissners: Man schleife nicht alle Kanten ein bisschen ab, sondern die einen ganz und die anderen gar nicht (Kasten). Genauer: Man rundet von jedem Paar gegenüberliegender Kanten nur einen Partner. Aber welchen? Dafür gibt es viele Auswahlmöglichkeiten; aber am Ende bleiben nur zwei übrig, die wesentlich verschieden sind, das heißt, nicht durch eine geeignete Drehung des ganzen Tetraeders ineinander übergehen. Man rundet entweder drei Kanten, die ein Fläche begrenzen, oder drei, die sich in einer Ecke treffen (Bild links unten). Beide Körper haben das gleiche und – höchstwahrscheinlich – minimale Volumen.

Das ist nun fast noch schlimmer als der Mangel an Symmetrie. Zwei verschiedene, gleich große Minima? Also ein »entarteter Grundzustand« in der Sprache der Atomphysiker? Das passt nicht ins allgemeine Bild. Auf der Suche nach einer »noch minimaleren« Lösung deformierten Thomas Lachand-Robert und Édouard Oudet von der Université de Savoie ganz allmählich den einen Körper in den anderen (»Morphing«) derart, dass jedes Zwischenstadium die Gleichdick-Bedingung erfüllt, in der Hoffnung, dass unterwegs das Volumen noch ein bisschen absinkt (Bild oben). Leider steigt das Volumen geringfügig an.

Martin Müller, ein Diplomand von Bernd Kawohl, wählte einen anderen Zugang. Lachand-Robert und Oudet haben eine alte Idee von Hans Rademacher (1892–1969) und Otto Toeplitz (1881–1941) zu einer Methode verallgemeinert, aus einem n-dimensionalen Gleichdick ein $(n+1)$-dimensionales zu konstruieren. Dieses Verfahren hat Müller für $n=2$ an einer Million nach dem Zufallsprinzip ausgewählter Beispiele durchgeführt. Keines der Ergebnisse konnte die Meissner-Körper an Volumen unterbieten.

Auch wenn der Beweis noch aussteht: Aller Voraussicht nach wird das merkwürdige Phänomen mit dem doppelten Minimum jeder weiteren Nachprüfung standhalten.

DER AUTOR

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

QUELLEN

Gardner, M.: Geschlossene Kurven mit konstantem Durchmesser. In: Logik unterm Galgen. Vieweg, Braunschweig 1980, S. 198–207

Kawohl, B., Weber, C.: Meissner's Mysterious Bodies. In: The Mathematical Intelligencer 33, Nr. 3, S. 94–101, 2011

Lachand-Robert, T., Oudet, É.: Bodies of Constant Width in Arbitrary Dimension. In: Mathematische Nachrichten 280, S. 740–750, 2007

Rademacher, H., Toeplitz, O.: Kurven konstanter Breite. In: Von Zahlen und Figuren. Nachdruck der Erstausgabe von 1930. Springer, Heidelberg 2000, S. 128–141

WEBLINK

Diesen Artikel, weitere Literaturhinweise sowie Weblinks finden Sie im Internet: **www.spektrum.de/artikel/1199290**