Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
G. Fischer
Dr. M.C. Zimmermann

Convex Optimization

Winter Term 2020/21

— Exercise Sheet 1 (November 3, 2020) —

Exercise 1.1. Prove the Gauss-Lucas theorem[1]: Let f be a complex polynomial in one variable and let $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ be the roots of f, i.e.

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Show that every root of the derivative f' lies in the convex hull of $z_1, \ldots, z_n$ where one interprets the complex plane $\mathbb{C}$ as $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.2. Show that

$$\mathcal{CP}^n = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i x_i^{\mathsf{T}} : N \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, x_i \in \mathbb{R}^n_+ \ (i = 1, \ldots, N) \right\}$$

is a closed, unbounded, convex set.

Exercise 1.3. For $\alpha > 0$ determine the maximum

$$\max \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i : x \in \mathbb{R}^n_+, \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \right\}.$$

Exercise 1.4. Given an integer $k \in [n]$ consider the *hypersimplex* $\Delta_{n,k}$ defined by

$$\Delta_{n,k} = \{x \in [0,1]^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Determine the vertices of $\Delta_{n,k}$.

[1]As an addition to his third proof of the fundamental theorem of algebra he claimed: Carl Friedrich Gauss Werke, Band III., page 112: *Lehrsatz. Sind $a, b, c \ldots m, n$ die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, $a', b', c' \ldots m'$ die Wurzeln der Gleichung $f'x = 0$, wo $f'x = \frac{dfx}{dx}$, und werden dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte in plano bezeichnet, so ist, wenn man sich in $a, b, c \ldots m, n$ gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernung wirken, in $a', b', c' \ldots m'$ Gleichgewicht.* It is interesting that the first published proof of this theorem—by Félix Lucas (1836–1914)—only appeared in 1879.