

Diplomarbeit

Über die Paralleloeder-Vermutung
von VORONOÏ

FRANK VALLENTIN

im Mai 2000

vorgelegt bei

Prof. Dr. RUDOLF SCHARLAU

Institut für Algebra und Geometrie
Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

Abstract

In 1908 VORONOÏ conjectured that every polytope which fills space by translations is the affine image of the DIRICHLET-VORONOÏ-polytope of a lattice. The goal of this diploma thesis is to prove this conjecture in the case of zonotopes. Zonotopes are those polytopes which are projections of cubes.

We provide a link between the theory of oriented matroids and the theory of zonotopal lattice tilings. The main advantage of this approach is the strict separation between combinatorial and metrical data. Firstly, this link was investigated by GERRITZEN and LOESCH.

Zonotopal lattices are defined as regular sublattices of \mathbb{Z}^n which are embedded in the euclidean \mathbb{R}^n . The standard basis of \mathbb{R}^n must not be an orthonormal basis, but it must be an orthogonal basis. The definition of regularity is highly motivated by TUTTE's theory of regular chain groups.

Let L be a zonotopal lattice. The key observation is the fact that lattice vectors of minimal support with coefficients in $\{-1, 0, +1\}$ are exactly the facet vectors of the lattice's DIRICHLET-VORONOÏ-polytope. Using FARKAS' lemma it follows that the DIRICHLET-VORONOÏ-polytope of L is the orthogonal projection of the cube $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ onto the subspace which is spanned by L .

Zonotopal lattices can be classified by SEYMOUR's famous decomposition theorem for regular matroids.

In this setting two known results get transparent proofs: MCMULLEN's characterization of space tiling zonotopes and ERDAHL's proof of VORONOÏ's conjecture in the case of zonotopes.

That the case of zonotopes is a very special case can be seen by looking at VORONOÏ's L -decomposition of the cone of positive definite quadratic forms into polyhedral domains which respects the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Zonotopal lattices can be regarded as special polyhedral domains of this decomposition but we prove that there is only one full-dimensional polyhedral domain which belongs to zonotopal lattices. It is the so called VORONOÏ's principal domain of the first perfect form.

Furthermore, we give a report on the results which are related to VORONOÏ's conjecture.

Vorwort

An dieser Stelle danke ich allen, die an der Entstehung dieser Diplomarbeit beteiligt waren.

Ich danke Prof. Dr. RUDOLF SCHARLAU für die dauerhafte Unterstützung und Förderung, sowie für die richtungsweisenden Hinweise. Ich danke den Mitgliedern des Instituts für Algebra und Geometrie des Fachbereichs Mathematik an der Universität Dortmund für die Schaffung einer lehrreichen und motivierenden Atmosphäre. Schließlich danke ich ANJA, BERNHARD, BORIS, RALF, SINIDA und THILO für die zahlreichen Anmerkungen, Erklärungen und Korrekturen.

Für die übrigen Fehler und andere Versehen bitte ich die Leserin und den Leser um Nachsicht und freue mich über konstruktive Kritik.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Konvexe Polyeder und konvexe Polytope	7
2.2	Gitter und positiv-definite quadratische Formen	10
2.2.1	Geometrische Invarianten von Gittern	11
2.2.2	Untergitter und Dualität von Gittern	14
2.2.3	Der Kegel der positiv-definiten quadratischen Formen	14
2.3	Orientierte Matroide	18
2.3.1	Axiomatik	18
2.3.2	Dualität von orientierten Matroiden	21
2.3.3	Minoren von orientierten Matroiden	21
2.3.4	Gerichtete Graphen: Bedeutung von $\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{C}^*, \mathcal{V}^*$	22
2.3.5	Vektorkonfigurationen: Bedeutung von $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{V}^*, \mathcal{C}^*$	23
2.3.6	Einfache orientierte Matroide	24
2.3.7	Reguläre orientierte Matroide	25
2.4	Zonotope	27
3	Zonotopale Gitter	31
3.1	Grundlagen zonotopaler Gitter	33
3.1.1	Reguläre Gitter	33
3.1.2	Reguläre Gitter mit Skalarprodukt	35
3.2	Kombinatorische Klassifikation von zonotopalen Gittern	42
3.3	Zonotopale Gitter in der L -Zerlegung von VORONOÏ	47
4	Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ	49
4.1	Ein Überblick über bekannte Resultate	51
4.2	Beweis der Vermutung für Zonotope	53

Kapitel 1

Einleitung

Schon seit der Antike ist es bekannt, daß die zweidimensionale Ebene nur mit Hilfe von symmetrischen Vierecken und Sechsecken gleichförmig gepflastert werden kann. Der russische Kristallograph FEDEROW zeigte 1891, daß man den Anschauungsraum nur mit Hilfe von Würfeln, hexagonalen Prismen, abgestumpften Oktaedern, rhombischen oder hexarhombischen Dodekaedern pflastern kann.

Diese Pflastersteine haben alle die Eigenschaft, daß sämtliche ihrer Flächen symmetrisch sind. In dieser Diplomarbeit wollen wir eine Methode entwickeln, die es uns erlaubt, alle möglichen Pflastersteine, deren Flächen symmetrisch sind und die den Raum einer vorgegebenen Dimension gleichförmig pflastern, anzugeben.

Doch nicht jeder Pflasterstein besitzt nur symmetrische Flächen. Spätestens 1931 stellte DELONE fest, daß in der Dimension 4 unter den 52 möglichen nur 17 Pflastersteine sind, die ausschließlich symmetrische Flächen haben.

Gitter und ihre geometrischen Eigenschaften Die Forderung einer *gleichförmigen* Pflasterung führt zu dem Begriff des Gitters. Ein Gitter auf dem d -dimensionalen euklidischen Vektorraum E ist eine Menge der Form $L = \{\sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{b}_i : \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \in E$ linear unabhängige Vektoren sind. Es ist naheliegend, ein Gitter als ein geometrisches Objekt anzusehen und sich nach einer Struktur umzuschauen, mit dem man die geometrischen Eigenschaften eines Gitters kompakt beschreiben kann. Das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop hat sich dafür als geeignet erwiesen. Das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines Gitterpunktes ist der Bereich des Raumes, dessen Punkte näher zu diesem Gitterpunkt als zu allen anderen Gitterpunkten liegt. Da alle DIRICHLET-VORONOÏ-Polytope der Gitterpunkte eines Gitters paarweise kongruent sind und sich nur um einen Translationsvektor unterscheiden, genügt es, das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop des Nullpunktes, das dann das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop des Gitters genannt wird,

$$DV(L) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \text{für alle } \mathbf{v} \in L \text{ gilt } \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|\}$$

zu studieren. Es ist ein Pflasterstein, mit dem man den Raum gitterförmig durch Verschiebungen pflastern kann, d.h. $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\mathbf{v} \in L} (DV(L) + \mathbf{v})$ und zwei verschiedene Pflastersteine überschneiden sich höchstens am Rand.

Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ Es ist zunächst überhaupt nicht klar, daß Pflastersteine, die den Raum gleichförmig pflastern, — diese Pflastersteine werden von VORONOÏ „Paralleloeder“ genannt — DIRICHLET-VORONOÏ-Polytope von Gittern sein müssen.

Streng genommen ist die Aussage auch falsch. VORONOÏ vermutete 1908, daß jeder Pflasterstein, der den Raum gleichmäßig pflastert, durch eine affine Transformation zu einem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines Gitters verwandelt werden kann. Genauer vermutete er:

GEORGES F. VORONOÏ, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, Deuxième Mémoire, Recherches sur les paralléloèdres primitifs*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **134** (1908), auf Seite 210–211:

On peut envisager le problème de partition uniforme de l'espace analytique à n dimension par de polyèdres convexes congruents indépendamment de la théorie des formes quadratiques.

En appelent paralléloèdre chaque polyèdre convexe qui jouit de la propriété I, je démontre le remarquable théorème suivant.

En effectuant toutes les transformations linéaires possibles à l'aide du groupe continu de substitutions

$$x_i = a_i + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x'_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

à coefficients réels quelconques d'un paralléloèdre primitif, on obtient un ensemble de paralléloèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels.

En vertu de ce théorème, le problème de partition uniforme de l'espace à n dimensions par de paralléloèdres primitifs congruents se ramène toujours à l'étude des paralléloèdres primitifs correspondant aux formes quadratiques positives.

Je suis porté à croire, sans pouvoir le démontrer, que le théorème énoncé est aussi vrai pour les paralléloèdres imprimitifs.

Diese Vermutung, die bis heute nur in Spezialfällen bewiesen wurde, wollen wir nocheinmal moderner formulieren:

Es seien V ein \mathbb{R} -Vektorraum endlicher Dimension und P ein konvexes Polytop, das den Raum V durch Translate pflastert. D.h. es gibt eine Menge $T \subseteq V$, so daß $V = \bigcup_{t \in T} (P + t)$ gilt und für $t, t' \in T$, $t \neq t'$ der Durchschnitt $(P + t) \cap (P + t')$ eine gemeinsame Seite von $P + t$ und $P + t'$ ist. Dann gibt es ein Skalarprodukt auf V und ein Gitter $L \subseteq V$, so daß P mit dem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L bis auf eine Translation übereinstimmt.

Raumteilende Zonotope und orientierte Matroide Wir interessieren uns für den Spezialfall, daß das betrachtete Polytop nur symmetrische Seiten besitzt. Ein solches Polytop heißt Zonotop. Nicht alle Zonotope sind Paralleloeder, wie man schon am zweidimensionalen 8-Eck sieht. Erstaunlich ist, daß die Eigenschaft des Paralleloederseins eines Zonotops nur durch Betrachtung von kombinatorischen Eigenschaften (Welche k -dimensionale Seite liegt in welcher $k + 1$ -dimensionalen Seite?) entschieden werden kann.

Die Kombinatorik von Zonotopen wird am effektivsten in der Theorie der orientierten Matroide studiert. Die zu Zonotopen gehörigen orientierten Matroide bilden die Teilklasse der realisierbaren orientierten Matroide in der Klasse aller orientierten Matroide. Die zu Zonotopen, die gleichzeitig Paralleloeder sind, gehörigen orientierten Matroide bilden dann die Teilklasse der regulären orientierten Matroide.

Ziele dieser Diplomarbeit Das Hauptziel dieser Diplomarbeit ist es, die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ für Zonotope zu beweisen. Dieses Ergebnis ist nicht neu, es wurde schon von ROBERT M. ERDAHL jedoch mit anderen Methoden nachgewiesen. Die von uns verwendeten

Methoden gehen vor allem auf WILLIAM T. TUTTE, PETER MCMULLEN, LOTHAR GERRITZEN und HEINZ FRIEDER LOESCH zurück. Außerdem wird herausgestellt, daß der Fall der Zonotope nur wenig zur allgemeinen Vermutung beiträgt.

TUTTE führte die sogenannten regulären Matroide ein und lieferte die grundlegenden Werkzeuge. Für ihn standen graphentheoretische Anwendungen der regulären Matroide im Vordergrund und weniger geometrische.

MCMULLEN konnte zeigen, daß ein Zonotop genau dann den umgebenen Raum pflastert, wenn das zugeordnete orientierte Matroid regulär ist. Dazu verallgemeinerte er Arbeiten von COXETER und SHEPHARD. Er sprach jedoch noch nicht von Matroiden.

GERRITZEN griff TUTTES Theorie erneut auf, und erweiterte die Definition um die Möglichkeit, Längen und Winkel zu messen. Sein Doktorand LOESCH untersuchte diese metrischen Matroide und fand einige interessanten Eigenschaften heraus. Dies ist auch der Startpunkt dieser Diplomarbeit. LOESCHS Aussagen werden hier größtenteils erneut bewiesen, da — zumindest nach der Meinung des Autors dieser Diplomarbeit — LOESCHS Dissertation weitreichend unverständlich oder wenigstens weitreichend umständlich ist.

Aufbau dieser Diplomarbeit Wir schauen uns das Inhaltsverzeichnis etwas detaillierter an:

Kapitel 2: Grundlagen Es werden die drei begrifflichen Grundpfeiler dieser Arbeit gelegt: Dies sind Polyeder, Gitter und orientierte Matroide. Zusätzlich werden in einem Abschnitt Zonotope behandelt, die eine Teilklasse der Polyeder bilden und deren kombinatorischen Eigenschaften sehr gut mit Hilfe von orientierten Matroiden beschrieben werden können.

Kapitel 3: Zonotopale Gitter TUTTES Theorie der regulären Kettengruppen wird für reguläre Gitter spezialisiert. Danach wird die Geometrie von regulären Gittern untersucht. Dies geschieht unter der Berücksichtigung eines speziellen Skalarprodukts, das GERRITZEN eingeführt hat. Wie schon LOESCH feststellte, sind solche Gitter „zonotopal“. Der Zerlegungssatz für reguläre Matroide von SEYMOUR liefert eine Möglichkeit, die zonotopalen Gitter zu klassifizieren. Daß zonotopale Gitter sehr spezielle Gitter sind, wird deutlich, wenn man sich die L -Zerlegung von VORONOÏ anschaut.

Kapitel 4: Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ Es wird ein Überblick über die im Umfeld der Paralleloeder-Vermutung entstandenen Resultate gegeben. Die Paralleloeder-Vermutung für Zonotope wird bewiesen, indem MCMULLENS Beweis für die Charakterisierung von Zonotopen, die den Raum pflastern, aufgearbeitet wird.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Aussagen der diskreten und kombinatorischen Geometrie gesammelt, und die Notation wird festgelegt. Es werden Grundbegriffe der Theorie der konvexen Polyeder, der klassischen Geometrie der Zahlen und der orientierten Matroide vorgestellt. Gewissermaßen eine Anwendung der orientierten Matroide stellt die Beschreibung der Zonotope dar, mit dem dieses Kapitel beendet wird.

Damit dieses Kapitel nicht unverhältnismäßig lang wird, sind viele der aufgelisteten Ergebnisse nur zitiert. Für eine ausführliche Darstellung sei auf ein modernes Buch über die Theorie der konvexen Polytope [Zie95], die Standardwerke der Geometrie der Zahlen [GL87], [CS88], sowie auf die universelle Referenz über orientierte Matroide [BVSZ93] und ein Lehrbuch über gewöhnliche Matroide [Ox192] verwiesen.

Im folgenden sei V ein d -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, der wie üblich als affiner Raum aufgefaßt wird. Es sei E ein d -dimensionaler reeller Vektorraum, der ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt und durch $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ normiert ist, d.h. das Paar $(E, (\cdot, \cdot))$ ist ein euklidischer Vektorraum und das Paar $(E, \|\cdot\|)$ ist ein BANACH-Raum. Modellhaft kann man sich $V = \mathbb{R}^d$ und $E = \mathbb{R}^d$ mit dem Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ vorstellen.

2.1 Konvexe Polyeder und konvexe Polytope

Konvexe Polyeder und konvexe Polytope sind Grundobjekte der diskreten und kombinatorischen Geometrie. Konvexe Polytope sind Verallgemeinerungen von zweidimensionalen n -Ecken. In diesem Abschnitt sammeln wir nur die wichtigsten Fakten der Theorie. Die Beweise, die zwar nicht schwierig, aber dennoch manchmal langwierig sind, sowie tiefere Ergebnisse der kombinatorischen Theorie konvexer Polytope befinden sich im Buch von ZIEGLER [Zie95]. Bei uns sind alle auftretenden Polyeder und Polytope konvex, so daß wir das Adjektiv „konvex“ gar nicht benötigen.

Ein *Polytop* P im affinen Vektorraum V ist die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ von V , ein Polytop ist also eine Menge der Form

$$P = \text{conv } X := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i : \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Genausogut können Polytope als beschränkte Lösungsmengen von endlich vielen linearen Ungleichungen beschrieben werden: Einerseits besitzt ein Polytop $P \subseteq V$ eine Darstellung der Form

$$P = \{\mathbf{x} \in V : f_i(\mathbf{x}) \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m\}, f_1, \dots, f_m \in V^*, \alpha \in \mathbb{R}^m,$$

andererseits läßt sich jede solche beschränkte Lösungsmenge als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten schreiben.

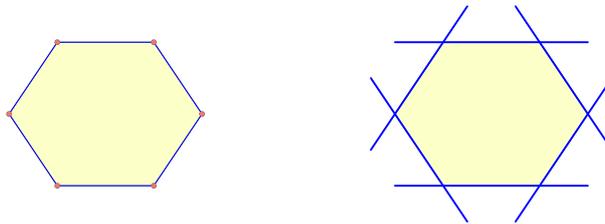


Abbildung 2.1: Die zwei Darstellungsformen eines Polytops.

Die Lösungsmenge eines Systems endlich vieler linearer Ungleichungen, die nicht notwendig beschränkt sein muß, wird *Polyeder* genannt. Polyeder lassen sich im allgemeinen zwar nicht als konvexe Hülle endlich vieler Punkte darstellen, aber immerhin als MINKOWSKI-Summe von einem polyedrischen Kegel und einem Polytop, was noch zu präzisieren ist. Eine Menge $Y \subseteq V$ heißt *Kegel*, falls mit $\mathbf{y} \in Y$ auch jedes positive Vielfache von \mathbf{y} in Y liegt. Ein *polyedrischer Kegel* ist ein Kegel der Form $\text{cone } Y := \{\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{y}_i : \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, wobei $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ eine endliche Menge von Vektoren aus V ist. Die *MINKOWSKI-Summe* von zwei Mengen $M, N \subseteq V$ ist die Menge $M + N := \{\mathbf{m} + \mathbf{n} : \mathbf{m} \in M, \mathbf{n} \in N\}$. Somit läßt sich ein Polyeder P einerseits als Lösungsmenge eines Systems endlich vieler linearer Ungleichungen und andererseits als MINKOWSKI-Summe $P = \text{conv } X + \text{cone } Y$ mit den endlichen Mengen $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V$ und $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\} \subseteq V$ beschreiben.

Als nächstes wollen wir das Konzept der Ecken, Kanten und Facetten eines Polyeders, das im \mathbb{R}^3 intuitiv einsichtig ist, in den affinen Raum V übertragen.

Es sei A eine Teilmenge von V . Die *affine Hülle* von A ist definiert als die Menge $\text{aff } A := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N}\}$, sie ist der kleinste affine Unterraum, der A enthält. Außerdem wird $\dim A := \dim \text{aff } A$ definiert.

Eine k -dimensionale Seite F eines Polyeders $P \subseteq V$ ist eine Teilmenge von P der Form

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}, \quad f \in V^*, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

wobei $f(\mathbf{x}) \leq \alpha$ eine lineare Ungleichung ist, die für alle $\mathbf{x} \in P$ erfüllt ist, und wobei k die Dimension der affinen Hülle von F ist. Die affine Hyperebene $H_{f,\alpha} := \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \alpha\}$ heißt *stützende Hyperebene* der Seite F .

Es sei $P \subseteq V$ ein Polyeder [Polytop]. Offensichtlich ist jede Seite von P ebenfalls ein Polyeder [Polytop], insbesondere sind P selbst und die leere Menge, deren Dimension mit -1 definiert wird, Seiten von P . Eine Seite von P , die weder die leere Menge noch P selbst ist, heißt *eigentliche Seite* von P . Die nulldimensionalen Seiten von P werden als *Ecken*, die eindimensionalen Seiten von P werden als *Kanten*, und die $(\dim P - 1)$ -dimensionalen Seiten von P werden als *Facetten* von P bezeichnet.

Die durch die Inklusion halbgeordnete Menge $\mathcal{F}(P)$ der Seiten eines Polyeders P besitzt eine besondere kombinatorische Struktur, die in der nachfolgenden Proposition beschrieben wird.

Proposition 2.1.1. (*Der Seitenverband eines Polyeders*)

Es sei $P \subseteq V$ ein Polyeder. Die Halbordnung $(\mathcal{F}(P), \subseteq)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- i) Sie ist ein *Verband*, d.h. je zwei Seiten $F, G \in \mathcal{F}(P)$ besitzen ein Infimum und ein Supremum.
- ii) Sie besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.
- iii) Jede maximale Kette $\emptyset = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\dim P} = P$ besitzt dieselbe Länge $\dim P$. Der Verband $(\mathcal{F}(P), \subseteq)$ ist *rein*.
- iv) Der Verband ist *coatomar*, d.h. jede eigentliche Seite ist Infimum einer geeigneten Menge von Facetten.
- v) Falls P ein Polytop ist, dann ist der Verband *atomar*, d.h. jede eigentliche Seite ist Supremum einer geeigneten Menge von Ecken.

Zwei Polyeder, deren Seitenverbände bis auf Isomorphie übereinstimmen, d.h. es gibt eine Bijektion zwischen der Mengen der Seiten beider Polyeder, die die Inklusion respektiert, heißen *kombinatorisch äquivalent*. Zwei konvexe Polyeder, die durch eine bijektive affine Abbildung ineinander überführt werden können, heißen *affin äquivalent*. Offensichtlich sind zwei konvexe Polyeder, die affin äquivalent sind, auch kombinatorisch äquivalent.

Die nächsten drei Lemmata sind besonders nützlich, um den Seitenverband eines Zonotops zu bestimmen, wie wir in Abschnitt 2.4 sehen werden.

Lemma 2.1.2. Es sei $P \subseteq V$ ein Polytop und $\pi : V \rightarrow V$ eine affine Abbildung. Dann ist $Q := \pi(P)$ ebenfalls ein Polytop. Jedes Urbild einer Seite von Q ist eine Seite von P . Falls F, G Seiten von Q sind, dann gilt $F \subseteq G$ genau dann, wenn $\pi(F) \subseteq \pi(G)$ ist.

Beweis. Siehe [Zie95], Lemma 7.10. ◇

Lemma 2.1.3. Es seien $P \subseteq V$ ein Polytop und $f \in V^*$ eine Linearform. Dann ist die Menge $F_f(P) := \{\mathbf{x} \in P : \text{für alle } \mathbf{y} \in P \text{ ist } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})\}$ eine Seite von P . Auf der Seite $F_f(P)$ nimmt die Linearform f ihr Maximum in P an.

Beweis. Eine leichte Fingerübung: Da f stetig ist und P kompakt ist, existiert das Maximum $\alpha := \max_{\mathbf{x} \in P} f(\mathbf{x})$. Dann ist $H_{f,\alpha} = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \alpha\}$ eine stützende Hyperebene für P , d.h. es ist $P \cap H_{f,\alpha} \neq \emptyset$ und P liegt komplett in dem abgeschlossenen Halbraum $H_{f,\alpha}^- = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$. Demnach ist $F_f(P) = P \cap H_{f,\alpha}$ eine Seite von P . ◇

Lemma 2.1.4. Es seien $P_1, P_2 \subseteq V$ Polytope und $f \in V^*$ eine Linearform. Die Seite der MINKOWSKI-Summe $P_1 + P_2$, die unter f maximal ist, läßt sich als $F_f(P_1 + P_2) = F_f(P_1) + F_f(P_2)$ schreiben.

Beweis.

$F_f(P_1 + P_2) \supseteq F_f(P_1) + F_f(P_2)$: Der Nachweis dieser Inklusion ist extrem einfach. Es sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in F_f(P_1) + F_f(P_2)$ mit $\mathbf{x}_1 \in P_1$ und $\mathbf{x}_2 \in P_2$. Nach Definition der Menge $F_f(P_1)$ folgt, daß für alle $\mathbf{y}_1 \in P_1$ die Ungleichung $f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{y}_1)$ gilt. Genauso folgt für alle $\mathbf{y}_2 \in P_2$ die Ungleichung $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{y}_2)$. Also gilt für alle $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in P_1 + P_2$ mit $\mathbf{y}_1 \in P_1$ und $\mathbf{y}_2 \in P_2$ die gewünschte Ungleichung

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{y}_1) + f(\mathbf{y}_2) = f(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = f(\mathbf{y}).$$

$F_f(P_1 + P_2) \subseteq F_f(P_1) + F_f(P_2)$: Zum Beweis der anderen Inklusion betrachten wir die bi-jektive Abbildung $\pi : P_1 \times P_2 \rightarrow P_1 + P_2$ mit $\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, wobei $\mathbf{x}_1 \in P_1$ und $\mathbf{x}_2 \in P_2$. Es seien $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \pi^{-1}(F_f(P_1 + P_2))$ und $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in P_1 \times P_2$ gegeben. Dann gilt $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, weil $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in F_f(P_1 + P_2)$ ist. Damit erhalten wir $f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{y}_1)$ und analog $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{y}_2)$. Es folgt $\pi^{-1}(F_f(P_1 + P_2)) \subseteq (F_f(P_1), F_f(P_2))$ bzw. $F_f(P_1 + P_2) \subseteq F_f(P_1) + F_f(P_2)$. \diamond

Bislang haben wir uns nur mit einzelnen Polyedern beschäftigt. Wenn sich Polyeder zusammenschließen und eng zusammenrücken, entsteht eine neue Struktur:

Definition 2.1.5. Ein *polyedrischer [polytopaler] Komplex* \mathcal{P} ist eine Menge von Polyedern [Polytopen] in V , für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) Falls ein Polyeder [Polytop] P zu \mathcal{P} gehört, so gehören auch alle Seiten von P zu \mathcal{P} .
- ii) Der Durchschnitt zweier Polyeder [Polytope] $P, Q \in \mathcal{P}$ ist eine gemeinsame Seite von P und Q .

Die Elemente des polyedrischen [polytopalen] Komplexes werden *Zellen* genannt.

Ein besonders monotoner polytopaler Komplex, der dafür immens groß ist, läßt sich aus Paralleloedern aufbauen:

Definition 2.1.6. Ein Polytop $P \subseteq V$ heißt *Paralleloeder*, wenn es eine Menge $L \subseteq V$ gibt und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Die Translate von P unter L überdecken den gesamten Raum, d.h. es gilt $\bigcup_{\mathbf{v} \in L} (P + \mathbf{v}) = V$.
- ii) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$ ist $(P + \mathbf{v}) \cap (P + \mathbf{w})$ eine gemeinsame Seite von $P + \mathbf{v}$ und $P + \mathbf{w}$.

Man sagt dann auch, daß P den Raum V *pflastert*.

2.2 Gitter und positiv-definite quadratische Formen

Der Begriff des Gitters wird definiert, sowie Begriffe, mit denen die wichtigsten geometrischen Eigenschaften eines Gitters beschrieben werden können. Die Gitter, die wir betrachten, besitzen die nicht genauer spezifizierte Dimension $n \leq d$. Manchmal ist es jedoch notwendig, daß das betrachtete Gitter die volle Dimension d besitzt.

Definition 2.2.1. Eine Teilmenge $L \subseteq V$ heißt *Gitter*, falls es $0 \leq n \leq d$ über \mathbb{R} linear unabhängige Vektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ gibt, so daß sich L schreiben läßt als

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i : \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_n.$$

Das n -Tupel $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ heißt *Basis* von L . Man sagt: das Gitter L ist n -dimensional.

Die obige Definition bezieht sich auf die Wahl linear unabhängiger Vektoren, die aber alles andere als eindeutig ist. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Mit $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det A = \pm 1\}$ wird die Gruppe der ganzzahligen unimodularen Transformationen bezeichnet. Es seien $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in V$ linear unabhängige Vektoren, $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_n$ das entsprechende Gitter und es sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige unimodulare Transformation, dann ist $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mathbf{b}_j$, $i = 1, \dots, n$, eine weitere Basis von L . Jede Basis von L entsteht aus $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation.

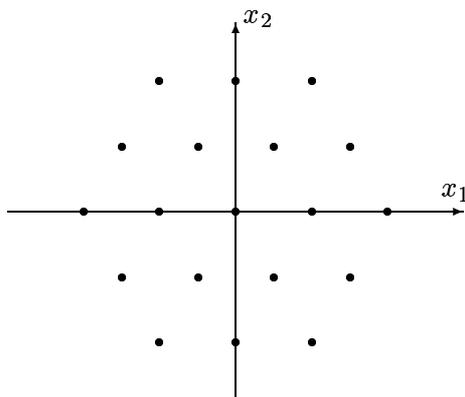


Abbildung 2.2: Das zweidimensionale hexagonale Gitter $\mathbb{Z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Gitter, die in einem affinen Raum leben, werden auch als *abstrakte Gitter* bezeichnet. Deutlich mehr geometrische Struktur besitzen die Gitter, die Untergruppen eines euklidischen Vektorraumes sind. So ist es möglich, Gitter ohne Angabe einer Basis zu definieren.

Proposition 2.2.2. Eine Untergruppe $(L, +)$ von $(E, +)$ ist genau dann ein Gitter, wenn sie diskret ist, d.h. wenn L keinen Häufungspunkt in E besitzt.

Beweis. Siehe [Neu92], Satz 4.2. ◇

Notation 2.2.3. Es sei $F \subseteq E$ ein Untervektorraum von E . Es gilt $E = F \oplus F^\perp$ mit $F^\perp := \{\mathbf{x} \in E : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{y} \in F\}$, d.h. jedes $\mathbf{x} \in E$ läßt sich eindeutig schreiben als $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, wobei $\mathbf{x}_1 \in F$ und $\mathbf{x}_2 \in F^\perp$. Mit $\pi_F : E \rightarrow F$ wird die orthogonale Projektion von E auf F bezeichnet: $\pi_F(\mathbf{x}) = \pi_F(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1$.

Anders als in der Vektorraumtheorie sind die Bilder von Gittern unter linearen Abbildungen im allgemeinen keine Gitter. Als einfachstes pathologisches Beispiel ist das Bild des Gitters \mathbb{Z}^2 unter der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1 + \sqrt{2}x_2$ zu nennen: $f(\mathbb{Z}^2)$ ist nicht diskret. Die Situation sieht deutlich besser aus, wenn orthogonale Projektionen auf orthogonale Vektorraumkomplemente betrachtet werden, wie Proposition 2.2.4 zeigt.

Proposition 2.2.4. Es sei $L \subseteq E$ ein n -dimensionales Gitter und seien $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n'} \in L$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist $M := \pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(L)$ ein $(n - n')$ -dimensionales Gitter.

Beweis. Es wird gezeigt, daß M eine diskrete Untergruppe von E ist. Daß M eine Untergruppe von E ist, ist offensichtlich. Angenommen $\mathbf{x} \in E$ ist eine Häufungspunkt von M . Betrachte eine Folge $(\pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Vektoren von M , die gegen \mathbf{x} konvergiert. Es gilt $\pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{n'} \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{b}_j)}{(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)} \mathbf{b}_j$. Betrachte die Folge $\mathbf{w}_i := \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{n'} \lfloor \frac{(\mathbf{v}_i, \mathbf{b}_j)}{(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)} \rfloor \mathbf{b}_j$, die aus paarweise verschiedenen Vektoren von L besteht, da $\pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_i) = \pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{w}_i)$ gilt. Für alle $i \in \mathbb{N}$ besitzt die Ungleichung $\|\mathbf{w}_i - \pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_i)\| \leq \sum_{j=1}^{n'} \|\mathbf{b}_j\|$ Gültigkeit, so daß die Folge $(\mathbf{w}_i - \pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von BOLZANO und WEIERSTRASS besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(\mathbf{w}_{i_j} - \pi_{(\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbb{R}\mathbf{b}_{n'})^\perp}(\mathbf{v}_{i_j}))_{j \in \mathbb{N}}$. Insbesondere ist die Folge $(\mathbf{w}_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergent. Dies steht im Widerspruch zur Diskretheit von L .

Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt, daß M die Dimension $n - n'$ besitzt. \diamond

2.2.1 Geometrische Invarianten von Gittern

Definition 2.2.5. Es seien E_1 und E_2 euklidische Vektorräume. Die Gitter $L_1 \subseteq E_1$ und $L_2 \subseteq E_2$ heißen *isometrisch*, falls es eine Isometrie $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ mit $\phi(L_1) = L_2$ gibt.

In diesem Abschnitt studieren wir geometrische Eigenschaften von Gittern, die nur von seiner Isometrieklasse abhängen. Solche Eigenschaften werden als geometrische Invarianten bezeichnet. Die wichtigste geometrische Invariante eines Gitters $L \subseteq E$ ist die Konfiguration seiner kürzesten nicht-trivialen Vektoren, seiner Minimalvektoren. Wenn L durch eine Basis gegeben ist, ist es ein schwieriges Problem — vermutlich sogar ein \mathcal{NP} -hartes Problem —, die Minimalvektoren von L zu finden (siehe [Val99]).

Proposition 2.2.6. Es sei $L \subseteq E$ ein Gitter und $\mu \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante, dann gibt es nur endlich viele Gittervektoren $\mathbf{v} \in L$ mit $\|\mathbf{v}\| \leq \mu$.

Beweis. Der Beweis ist äußerst einfach: In der Kugel $\overline{B}(\mathbf{0}, \mu) = \{\mathbf{y} \in E : d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) \leq \mu\}$ können nur endlich viele Gittervektoren liegen, da ansonsten ein Häufungspunkt existiert. \diamond

Definition 2.2.7. Es sei $L \subseteq E$ ein Gitter. Die Norm eines kürzesten Vektors von $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ heißt *Minimum* von L , $\min L := \min\{\|\mathbf{v}\| : \mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}\}$. Die Gittervektoren von L , die das Minimum von L realisieren, heißen *Minimalvektoren* von L , $\text{Min } L := \{\mathbf{v} \in L : \|\mathbf{v}\| = \min L\}$.

Ein Gitter wirkt als Translationsgruppe auf dem euklidischen Vektorraum, in dem es eingebettet ist. Einer solchen Gruppe kann man einen Fundamentalbereich zuordnen.

Definition 2.2.8. Es sei $L \subseteq E$ ein d -dimensionales Gitter. Eine Menge $F \subseteq E$ heißt ein *Fundamentalbereich* von L , wenn F meßbar¹ ist, $E = \bigcup_{\mathbf{v} \in L} (F + \mathbf{v})$ und für alle $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Gleichung $\text{vol}(F \cap (F + \mathbf{v})) = 0$ gilt.

¹Eine Menge $M \subseteq E$ heißt meßbar, wenn ihre charakteristische Funktion $1_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{x} \in M, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ für $\mathbf{x} \in E$, LEBESGUE-integrierbar ist. Jedoch genügt uns hier schon ein intuitiver Volumenbegriff.

Es sei $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq E$ ein Gitter, dann ist die Menge $F = \{\sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{b}_i : \alpha_i \in [0, 1]\}$ ein Fundamentalbereich von L . Alle Fundamentalbereiche von L besitzen das gleiche Volumen, das, wenn L durch eine Basis gegeben ist, effizient berechenbar ist, wie wir im folgenden sehen werden.

Definition 2.2.9. Es sei $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq E$ ein d -dimensionales Gitter und es sei $G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)} = ((\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j))_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die positiv-definite GRAM-Matrix von L bzgl. der Basis $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)$. Die *Determinante* von L wird definiert als die Determinante einer GRAM-Matrix: $\det L := \det G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}$.

Da die Determinante eines Gitters von der Basiswahl unabhängig ist (zwei Basen unterscheiden sich nur durch eine unimodulare, ganzzahlige Transformation), ist sie eine geometrische Invariante des Gitters. Sie ist das Quadrat des Volumens eines Fundamentalbereichs des Gitters.

Ein besonderer Fundamentalbereich eines Gitters ist sein DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop. Nahezu sämtliche geometrischen Eigenschaften eines Gitters lassen sich an seinem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop ablesen.

Definition 2.2.10. Es sei $L \subseteq E$ ein d -dimensionales Gitter. Die Menge $DV(L) := \{\mathbf{x} \in E : \forall \mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\} : d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{v})\}$ heißt das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L .

Für einen Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiere die affine Hyperebene $H_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{x} \in E : (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{v})\}$. Falls $H_{\mathbf{v}} \cap DV(L) \neq \emptyset$ ist, so heißt \mathbf{v} VORONOÏ-Vektor. Falls $H_{\mathbf{v}} \cap DV(L)$ sogar eine Facette von $DV(L)$ ist, so heißt \mathbf{v} strikter VORONOÏ-Vektor.

Ein wohlbekanntes Theorem von VORONOÏ charakterisiert die VORONOÏ-Vektoren.

Theorem 2.2.11. Ein Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist genau dann ein VORONOÏ-Vektor, wenn er ein Minimalvektor in der Nebenklasse $\mathbf{v} + 2L$ ist. Ein Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist genau dann ein strikter VORONOÏ-Vektor, wenn $\pm \mathbf{v}$ die einzigen Minimalvektoren in der Nebenklasse $\mathbf{v} + 2L$ sind.

Beweis. Siehe [CS92], Theorem 2. ◇

Durch Translate pflastert das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines d -dimensionalen Gitters L den Raum. Dadurch wird ein polytopaler Komplex, VORONOÏ-Pflasterung von L (Notation: $\text{Vor}(L)$) genannt, definiert. Zu $\text{Vor}(L)$ gibt es einen orthogonalen polytopalen Komplex, der sich explizit durch die „Sur la sphère vide“-Methode von DELONE angeben läßt.

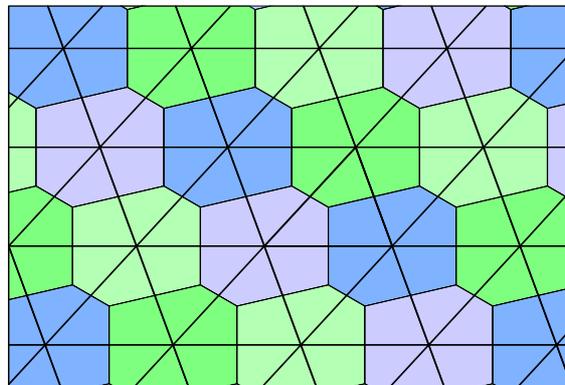


Abbildung 2.3: Die VORONOÏ- und die DELONE-Pflasterung eines Gitters.

Definition 2.2.12. Es sei $L \subseteq E$ ein d -dimensionales Gitter. Die DELONE-Pflasterung von L ist der polytopale Komplex $\text{Del}(L)$, dessen Zellen Gitterpolytope sind, die wie folgt definiert sind: Für $X \subset L$ ist $\text{conv}(X) \in \text{Del}(L)$ genau dann, wenn es einen Punkt $\mathbf{a} \in E$ und einen Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, so daß $L \cap \partial \overline{B}(\mathbf{a}, r) = X$ und $L \cap \overline{B}^0(\mathbf{a}, r) = \emptyset$ gilt. D.h. die Gitterpunkte aus X liegen auf einer Sphäre, deren Inneres frei von Gitterpunkten ist.

Jede k -dimensionale Zelle von $\text{Vor}(L)$ steht senkrecht auf einer $(d - k)$ -dimensionalen Zelle von $\text{Del}(L)$, wie man in der Abbildung 2.3 sieht.

Zur Berechnung der DELONE-Pflasterung ist die sogenannte Lifting-Eigenschaft der DELONE-Pflasterung nützlicher als die Definition. Sie wurde zuerst von EDELSBRUNNER und SEIDEL in [ES86] verwendet, um DELONE-Pflasterungen von endlichen Punktmengen zu bestimmen.

Proposition 2.2.13. (*Lifting-Eigenschaft der DELONE-Pflasterung*)

Mit $l : E \rightarrow E \times \mathbb{R}$, $l(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, (\mathbf{x}, \mathbf{x}))$, wird eine Lifting-Abbildung beschrieben, die den euklidischen Vektorraum E auf ein Paraboloid in $E \times \mathbb{R}$ hochhebt. Es sei $L \subseteq E$ ein Gitter der Dimension d . Eine Menge $\text{conv } X$, $X \subset L$, ist genau dann eine Zelle der DELONE-Pflasterung $\text{Del}(L)$, falls das Polytop $\text{conv } l(X)$ eine Seite der konvexen Menge $\text{conv } l(L)$ ist.

Beweis. Einerseits sei eine Menge $X \subset L$ gegeben, deren konvexe Hülle eine Zelle von $\text{Del}(L)$ ist. Dann existieren $\mathbf{a} \in E$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $L \cap \partial \overline{B}(\mathbf{a}, r) = X$ und $L \cap \overline{B}^0(\mathbf{a}, r) = \emptyset$. Da für alle $\mathbf{x} \in X$ die Beziehung $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r^2$ gilt, ist die Menge $l(X)$ und damit auch ihre konvexe Hülle in der affinen Hyperebene $H := \{(\mathbf{x}, n) \in E \times \mathbb{R} : n - 2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r^2\}$ enthalten. Für alle anderen Gittervektoren $\mathbf{v} \in L \setminus X$ gilt $\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 > r^2$. Dies hat zur Folge, daß H eine Stützhyperebene von $\text{conv } l(L)$ ist und $H \cap \text{conv } l(L) = \text{conv } l(X)$ gilt. Damit ist $\text{conv } l(X)$ eine Seite von $\text{conv } l(L)$.

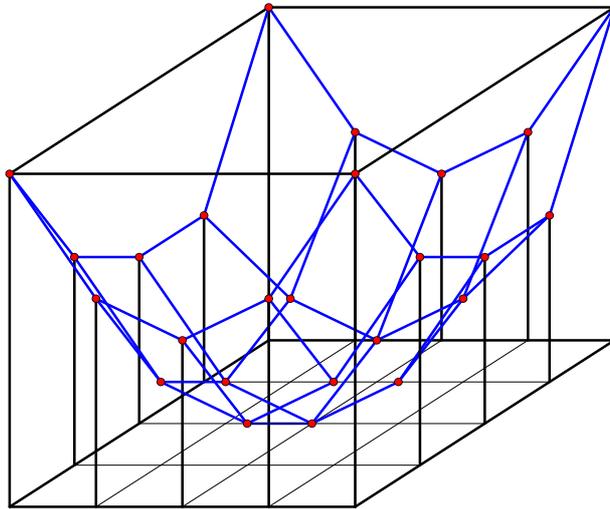


Abbildung 2.4: Die Lifting-Eigenschaft der DELONE-Pflasterung.

Andererseits sei eine Seite $\text{conv } l(X)$, $X \subset L$, von $\text{conv } l(L)$ gegeben. Es gibt dann einen Vektor $(\mathbf{a}', 1) \in E \times \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}_{> 0}$, die zusammen eine Stützhyperebene dieser Seite bestimmen. Für alle $(\mathbf{x}, (\mathbf{x}, \mathbf{x})) \in l(X)$ gilt die Gleichung

$$\alpha = ((\mathbf{x}, (\mathbf{x}, \mathbf{x})), (\mathbf{a}', 1)) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}') + (\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

und für alle $(\mathbf{v}, (\mathbf{v}, \mathbf{v})) \in l(L) \setminus l(X)$ die Gleichung

$$\alpha < ((\mathbf{v}, (\mathbf{v}, \mathbf{v})), (\mathbf{a}', 1)) = (\mathbf{v}, \mathbf{a}') + (\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Wir setzen $\mathbf{a} := -\frac{1}{2}\mathbf{a}'$ und $r := \sqrt{\alpha + (\mathbf{a}, \mathbf{a})}$. Daraus ergibt sich $L \cap \partial \overline{B}(\mathbf{a}, r) = X$ und $L \cap \overline{B}^0(\mathbf{a}, r) = \emptyset$, da für alle $\mathbf{x} \in X$ die Gleichung

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{a}') + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \alpha + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r^2$$

und für alle $\mathbf{v} \in L \setminus X$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2(\mathbf{v}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{a}') + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) > \alpha + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r^2$$

erfüllt ist. ◇

2.2.2 Untergitter und Dualität von Gittern

Es sei $L \subseteq E$ ein Gitter. Eine Teilmenge M von L heißt *Untergitter* von L , wenn M selbst ein Gitter ist. Wenn zwei Gitter $M \subseteq L \subseteq E$ gegeben sind, ist $(M, +)$ eine Untergruppe von $(L, +)$, und man kann den Index von M in L , d.h. die Kardinalität der Faktorgruppe L/M betrachten.

Proposition 2.2.14. Es seien $M \subseteq L \subseteq E$ Gitter der gleichen Dimension n . Wenn $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die Matrix eines Basiswechsels einer Basis von L zu einer von M ist, d.h. die Koordinaten einer Basis von M werden in den Koordinaten einer Basis von L ausgedrückt, dann gilt

$$[L : M] = |L/M| = |\det A|.$$

Korollar 2.2.15. (*Determinanten-Index-Formel*)

Es seien $M, L \subseteq E$ Gitter der gleichen Dimension und es sei M ein Untergitter von L , dann gilt

$$\det M = [L : M]^2 \det L.$$

Proposition 2.2.16. (*Basisergänzung für Gitter*)

Es seien $M, L \subseteq E$ Gitter und es sei M ein Untergitter von L . Eine Basis von M läßt sich genau dann zu einer Basis von L ergänzen, falls jeder Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ mit $\alpha \mathbf{v} \in M$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}$ auch ein Gittervektor von M ist. Vornehm ausgedrückt: Das Untergitter M ist genau dann ein direkter Summand von L , falls L/M torsionsfrei ist.

Es sei $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq E$ ein d -dimensionales Gitter. Die Menge $L^\# := \{\mathbf{x} \in E : (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \mathbf{v} \in L\}$ ist ebenfalls ein d -dimensionales Gitter. Die Vektoren $\mathbf{b}_i^\# \in L^\#$ mit der Eigenschaft $(\mathbf{b}_i^\#, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq d$, bilden eine Basis von $L^\#$. Außerdem gilt $\det L^\# = (\det L)^{-1}$ und $(L^\#)^\# = L$. Das Gitter $L^\#$ heißt das zu L *duale Gitter*.

2.2.3 Der Kegel der positiv-definiten quadratischen Formen

In diesem Abschnitt studieren wir zwei Äquivalenzrelationen, die auf VORONOÏ zurückgehen. Historisch werden sie in der Sprache der positiv-definiten quadratischen Formen über \mathbb{R} formuliert. Im ersten Schritt geben wir an, in welcher Weise Gitter und positiv-definite quadratische Formen dasselbe sind. Dann betrachten wir den Kegel der positiv-definiten quadratischen Formen im Vektorraum der quadratischen Formen und sehen, daß die Äquivalenzklassen beider Relationen polyedrische Kegel sind, die den Kegel der positiv-definiten quadratischen Formen in eine Seite-an-Seite-Pflasterung zerlegen.

Allgemein läßt sich eine quadratische Form so definieren [Kne00]: Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und M ein R -Modul. Eine Abbildung $q : M \rightarrow R$, die für alle $r \in R$ und alle $x, y \in M$ die Eigenschaften $q(rx) = r^2q(x)$ und $q(x + y) = q(x) + q(y) + b(x, y)$ besitzt, wobei $b : M \times M \rightarrow R$ eine symmetrische Bilinearform ist, heißt *quadratische Form*. Die Menge $\{q : M \rightarrow R : q \text{ ist eine quadratische Form}\}$ bildet mit den natürlich gegebenen Verknüpfungen ebenfalls einen R -Modul.

Wir sind nur an dem Fall $R = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}^n$ interessiert, so daß wir ganz konkret die quadratischen Formen mit den symmetrischen $(n \times n)$ -Matrizen identifizieren können: Bei gegebener symmetrischer Matrix $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $F[\cdot]$ mit $F[\mathbf{x}] := \mathbf{x}^t F \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, eine quadratische Form, und bei gegebener quadratischer Form $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $F := (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_{ii} := F[\mathbf{e}_i]$, $f_{ij} := \frac{1}{2}(F[\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j] - F[\mathbf{e}_i] - F[\mathbf{e}_j])$, $1 \leq i, j \leq n$ eine symmetrische Matrix. Die angegebenen Abbildungen sind invers zueinander. Wir verleihen dem Vektorraum der quadratischen Formen eine Topologie, indem wir uns irgendeine Norm wählen. Zwei quadratische Formen $F[\cdot], F'[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *arithmetisch äquivalent*, falls es eine ganzzahlige unimodulare Transformation $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ gibt, so daß für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $F[\mathbf{x}] = F'[A\mathbf{x}]$ erfüllt ist. Eine quadratische Form $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *positiv-definit*, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Ungleichung $F[\mathbf{x}] > 0$ erfüllt ist bzw. wenn die zugehörige symmetrische Matrix F positiv-definit ist. Genauso lassen sich *positiv-semidefinite* quadratische Formen definieren.

Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen den Isometrieklassen von Gittern und den arithmetischen Äquivalenzklassen von positiv-definiten quadratischen Formen, so daß wir im folgenden unbekümmert zwischen den beiden Sprechweisen wechseln werden, falls die besprochene Eigenschaft eine Invariante der entsprechenden Klasse ist. Dabei wird einem Gitter $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_n$ in einem euklidischen Vektorraum $(E, (\cdot, \cdot))$ eine positiv-definite GRAM-Matrix $G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)} = ((\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j))$ (und somit eine positiv-definite quadratische Form) zugeordnet und einer positiv-definiten quadratischen Form $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wird das Gitter \mathbb{Z}^n im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, s_{F[\cdot]})$, wobei das Skalarprodukt $s_{F[\cdot]} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $s_{F[\cdot]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^t F \mathbf{y}$ definiert wird, zugeordnet.

Die Menge $\{F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : F[\cdot] \text{ ist positiv-definite quadratische Form}\}$ bildet im Vektorraum der quadratischen Formen, der die Dimension $n(n+1)/2$ besitzt, einen offenen, volldimensionalen Kegel. Der topologische Abschluß dieses Kegels besteht aus den positiv-semidefiniten quadratischen Formen. VORONOÏ gibt in [Vor08] und [Vor09] zwei Möglichkeiten an, den Kegel der positiv-semidefiniten quadratischen Formen in polyedrische Kegel, deren Spitzen jeweils im Ursprung liegen, „sinnvoll“ zu zerlegen. Dabei besitzen beide Zerlegungen die folgenden Eigenschaften:

- i) Je zwei polyedrische Kegel sind entweder disjunkt oder sie besitzen eine gemeinsame Seite.
- ii) Eine ganzzahlige unimodulare Transformation läßt einen polyedrischen Kegel entweder fest, oder sie transformiert ihn in einen anderen polyedrischen Kegel der Zerlegung (solche Kegel heißen äquivalent). Die Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ operiert somit auf der Zerlegung.
- iii) Es gibt in einer Zerlegung nur endlich viele paarweise nicht äquivalente polyedrische Kegel. Die Anzahl der Bahnen der Operation von $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ auf der Zerlegung ist endlich.

Die erste Zerlegung von VORONOÏ ist durch das Problem der dichtesten Kugelpackung für Gitter motiviert. Durch ein Gitter wird eine Packung von gleich großen Kugeln definiert, deren Mittelpunkte genau die Gitterpunkte sind und deren Radii die Hälfte des Gitterminimums betragen. Die Dichte der Kugelpackung, die durch ein Gitter L (bzw. durch eine positiv-definite quadratische Form) festgelegt wird, ist durch die HERMITE-Zahl $\gamma(L) := \min L / (\det L)^{1/n}$ von L bestimmt.

Ein Gitter heißt *extrem*, wenn seine HERMITE-Zahl ein lokales Maximum annimmt. Ein notwendiges Kriterium für die Extremität eines Gitters ist seine Perfektheit, die wir gleich in der Sprache der positiv-definiten quadratischen Formen erläutern.

Es sei $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv-definite quadratische Form. Das *Minimum* von $F[\cdot]$ ist definiert als $\min F[\cdot] := \min\{F[\mathbf{v}] : \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, und die Menge seiner *Minimalvektoren* ist $\text{Min } F[\cdot] := \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n : F[\mathbf{v}] = \min F[\cdot]\}$, was in völliger Analogie zur Definition 2.2.7 steht.

Definition 2.2.17. Die positiv-definite quadratische Form $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, falls die positiv-semidefiniten Matrizen $\mathbf{v}\mathbf{v}^t$, $\mathbf{v} \in \text{Min } F[\cdot]$, die vom Rang 1 sind, den Vektorraum der quadratischen Formen erzeugen.

Da die Definition 2.2.17 unter arithmetischer Äquivalenz invariant ist, ist der Begriff der Perfektheit auch für Gitter definiert.

Definition 2.2.18. Es sei $F[\cdot] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv-definite quadratische Form. Wir definieren den abgeschlossenen, polyedrischen Kegel $\Phi(F[\cdot]) := \text{cone}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^t : \mathbf{v} \in \text{Min } F[\cdot]\}$.

Durch diese Definition erhält man eine Zerlegung des Kegels der positiv-semidefiniten quadratischen Form in polyedrische Kegel mit den oben aufgezählten Eigenschaften. Sie wird als *P-Zerlegung* bezeichnet. Die *P-Zerlegung* ist zur Zeit nur bis zur Dimension 7 explizit bekannt (siehe [Jaq93]).

Beispiel 2.2.19. (*Der Hauptkegel von VORONOÏ und die Gitter von erster Art*)

Ein Gitter L heißt von *erster Art*, wenn es eine stumpfe affine Basis besitzt, d.h. wenn es eine Basis $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ von L gibt, so daß die Vektoren $\mathbf{b}_0 := -\sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ paarweise stumpfe Winkel bilden, d.h. $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \leq 0$ für $0 \leq i < j \leq n$ gilt. Mit den Gittern von erster Art der Dimension ≤ 3 haben sich CONWAY und SLOANE in [CS92] und mit Gittern von erster Art der Dimension ≤ 4 hat sich JANZEN in [Jan98] ausgiebig beschäftigt.

Das einzige extreme Gitter von erster Art ist das Wurzelgitter $A_n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0\}$. Die Minimalvektoren von A_n sind $\text{Min } A_n := \{\pm \mathbf{e}_i, \pm(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) : 1 \leq i < j \leq n+1\}$. Der Kegel $\Phi(A_n)$ wird auch der Hauptkegel von VORONOÏ genannt.

Ein Gitter ist genau dann von erster Art, falls die zugeordnete positiv-definite quadratische Form in einem Kegel liegt, der zum Hauptkegel von VORONOÏ äquivalent ist ([Jan98], Satz 2.4.5). Die Gitter von erster Art, die eine strikte stumpfe affine Basis besitzen — wie z.B. das Gitter $A_n^\#$ — sind primitiv (siehe weiter unten). Sie sind genau die Gitter, die im Inneren des Hauptkegels von VORONOÏ liegen ([Jan98], Bemerkung 2.4.6).

Es sei L ein Gitter von erster Art, das die stumpfe affine Basis $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ besitzt. Es gilt dann für einen Gittervektor $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{b}_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ die SELLINGSche Formel ([Jan98], Lemma 2.2.3)

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)(\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Die $2(2^n - 1)$ Gittervektoren $\mathbf{v}_S := \sum_{i \in S} \mathbf{b}_i$, $\emptyset \neq S \subset \{0, 1, \dots, n\}$, sind VORONOÏ-Vektoren von L ([Jan98] Satz 2.2.5).

Der Seitenverband des DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops eines Gitters von erster Art läßt sich unmittelbar am sogenannten DELONE-Graph ablesen, wie wir im Abschnitt 3.2 sehen werden (siehe auch [Jan98], Abschnitt 3.2). Der DELONE-Graph ist ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$, der einem Gitter L mit stumpfer affiner Basis $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ zugeordnet ist: die Knotenmenge ist $V = \{0, 1, \dots, n\}$ und die Kantenmenge ist $E = \{(i, j) \in V \times V : (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \neq$

$0, 0 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. Z.B. ist der DELONE-Graph des Gitters $A_n^\#$ der vollständige Graph K_{n+1} , und in Beispiel 2.3.11 ist der DELONE-Graph des Gitters

$$L = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu sehen.

Die zweite Zerlegung von VORONOÏ basiert auf den kombinatorisch-geometrischen Eigenschaften von Gittern und dem Problem der dünnsten gitterförmigen Kugelüberdeckung des Raumes, nämlich auf der DELONE-Pflasterung.

Definition 2.2.20. Es seien $F[\cdot], F'[\cdot] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei positiv-definite quadratische Formen. Wir sagen, daß $F[\cdot]$ und $F'[\cdot]$ vom selben L -Typ sind, falls das Gitter \mathbb{Z}^n in den euklidischen Vektorräumen $(\mathbb{R}^n, s_{F[\cdot]})$ und $(\mathbb{R}^n, s_{F'[\cdot]})$ dieselbe DELONE-Pflasterung besitzt. Die Äquivalenzklassen bilden relativ-offene polyedrische Kegel. Durch Bildung der topologischen Abschlüsse wird eine Zerlegung des Kegels der positiv-semidefiniten quadratischen Formen induziert, die L -Zerlegung genannt wird.

Die L -Zerlegung ist zur Zeit nur bis zur Dimension 5 explizit bekannt (siehe [BR76] und [Eng98]).

Eine positiv-definite quadratische Form, deren zugeordnete DELONE-Pflasterung nur aus Simplexes besteht, heißt *generisch*. Die Äquivalenzklasse einer positiv-definiten Form ist genau dann ein volldimensionaler Kegel in der L -Zerlegung, falls sie generisch ist. Dann ist die zur DELONE-Pflasterung orthogonale VORONOÏ-Pflasterung *primitiv*, d.h an jedem Eckpunkt treffen sich genau $n + 1$ Pflastersteine. Eine nicht-generische positiv-definite quadratische Form heißt *speziell*.

Lange Zeit war die Frage ungeklärt, ob die L -Zerlegung des Kegels der positiv-definiten quadratischen Formen eine Verfeinerung der P -Zerlegung ist. Dies ist bis zur Dimension 5 richtig (siehe [BR76]) und erst neulich konnte ERDAHL ein Gegenbeispiel in Dimension 6 konstruieren. Das folgende Theorem zeigt auf, daß der Hauptkegel von VORONOÏ in beiden Zerlegungen vorkommt.

Theorem 2.2.21. (DICKSON, [Dic72])

Die einzigen volldimensionalen Kegel von positiv-definiten quadratischen Formen, die gleichzeitig zur L -Zerlegung und zur P -Zerlegung gehören, sind äquivalent zum Hauptkegel von VORONOÏ.

2.3 Orientierte Matroide

Die Grundzüge der Theorie orientierter Matroide wurden etwa vor einem Vierteljahrhundert parallel von ROBERT BLAND, JON FOLKMAN, MICHEL LAS VERGNAS und JIM LAWRENCE entwickelt. Orientierte Matroide beschreiben kombinatorische Eigenschaften z.B. von Punktfigurationen, Hyperebenenarrangements, gerichteten Graphen, dem Dualitätsprinzip der linearen Optimierung. Doch sind orientierte Matroide allgemeinere Objekte. LAWRENCE konnte beweisen, daß orientierte Matroide mit Arrangements von deformierten Hyperebenen identifizierbar sind.

Wir resümieren die Grundzüge der Theorie und wenden sie auf Punktfigurationen, gerichtete Graphen, sowie auf Gitter an.

2.3.1 Axiomatik

Im folgenden kürzen wir die Menge $\{-1, 0, +1\}$ durch $\{-, 0, +\}$ ab. Auf der Menge $\{-, 0, +\}$ wird eine Halbordnung durch „ $0 < +$ “ und „ $0 < -$ “ definiert, wobei die Elemente $+$ und $-$ nicht vergleichbar sind.

Es sei E eine endliche (Index-)Menge. Die Menge $\{-, 0, +\}^E$ heißt die Menge der *Vorzeichenvektoren* über E . Auf ihr wird die Halbordnung von $\{-, 0, +\}$ komponentenweise fortgesetzt.

Es seien $X, Y \in \{-, 0, +\}^E$ Vorzeichenvektoren. Für ein $e \in E$ bezeichnet X_e die e -te Komponente des Vorzeichenvektors X . Mit $X^+ := \{e \in E : X_e > 0\}$ wird der positive, mit $X^- := \{e \in E : X_e < 0\}$ der negative Anteil, mit $X^0 := \{e \in E : X_e = 0\}$ der neutrale Anteil und mit $\underline{X} := X^+ \cup X^-$ der *Träger* von X beschrieben. Das Negative $-X$ eines Vorzeichenvektors ist durch die Gleichungen $(-X)^+ = X^-$ und $(-X)^- = X^+$ festgelegt. Das *Produkt* $X \circ Y$ zweier Vorzeichenvektoren ist komponentenweise für $e \in E$ durch

$$(X \circ Y)_e := \begin{cases} Y_e & \text{falls } X_e < Y_e, \\ X_e & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert. Die Vorzeichenvektoren X und Y heißen *zueinander konform*, wenn $X \circ Y = Y \circ X$ gilt. Die Menge $S(X, Y) := \{e \in E : X_e = -Y_e \neq 0\}$ heißt die *Trennungsmenge* von X und Y . Das Minimum MIN einer Menge von Vorzeichenvektoren besteht aus den Elementen, die minimalen Träger in der Menge besitzen.

Die Covektoren eines orientierten Matroids

Definition 2.3.1. Es seien E eine endliche Menge und \mathcal{V}^* eine Teilmenge der Vorzeichenvektoren über E . Die Menge \mathcal{V}^* ist die Menge der *Covektoren* eines *orientierten Matroids* \mathcal{M} über E , falls die nachfolgenden Axiome erfüllt sind:

$$(V1) \mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathcal{V}^*.$$

$$(V2) X \in \mathcal{V}^* \implies -X \in \mathcal{V}^*.$$

$$(V3) X, Y \in \mathcal{V}^* \implies X \circ Y \in \mathcal{V}^*.$$

$$(V4) X, Y \in \mathcal{V}^*, e \in S(X, Y) \implies \exists Z \in \mathcal{V}^* : (Z_e = 0 \wedge \forall f \in E \setminus S(X, Y) : Z_f = (X \circ Y)_f).$$

Der *Rang* von \mathcal{M} ist die maximale Länge $r = r(\mathcal{M})$ einer aufsteigenden Kette seiner Covektoren:

$$\mathbf{0} < X^1 < X^2 < \dots < X^r, \quad X^i \in \mathcal{V}^*, \quad i = 1, \dots, r.$$

Es seien $\mathcal{V}_1^* \subseteq \{-, 0, +\}^{E_1}$ und $\mathcal{V}_2^* \subseteq \{-, 0, +\}^{E_2}$ die Covektoren der orientierten Matroide \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 . Die orientierten Matroide heißen *isomorph*, falls es eine Bijektion $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ gibt, so daß $X \in \mathcal{V}_1^*$ genau dann gilt, wenn $\tilde{\sigma}(X) \in \mathcal{V}_2^*$ ist, wobei $\tilde{\sigma}(X)_{\sigma(e)} = X_e$ für $e \in E_1$ definiert ist. Wir schreiben dann $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.

Es sei \mathcal{M} ein durch die Covektoren \mathcal{V}^* gegebenes orientiertes Matroid. Wir fügen der Menge \mathcal{V}^* ein maximales Element $\hat{1}$ hinzu, so daß $X < \hat{1}$ für alle $X \in \mathcal{V}^*$ gilt. Dadurch wird $\hat{\mathcal{V}}^* := \mathcal{V}^* \cup \{\hat{1}\}$ mit der Halbordnung „ \leq “ zu einem Verband. Für zwei Covektoren $X, Y \in \mathcal{V}^*$ kann das Supremum direkt durch

$$X \vee Y = \begin{cases} X \circ Y = Y \circ X, & \text{falls } S(X, Y) = \emptyset, \\ \hat{1}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

angegeben werden. Der Verband der Covektoren eines orientierten Matroids \mathcal{M} besitzt einige nützliche Eigenschaften ([BVSZW93], Chapter 4). Er ist z.B. rein (jede maximale Kette besitzt die Länge $r(\mathcal{M})$) und atomar (jedes Element von $\hat{\mathcal{V}}^*$ ist das Supremum einer Menge von Atomen, siehe unten).

Das orientierte Matroid, das in den Kapiteln 3 und 4 die Hauptrolle spielen wird, wollen wir schon jetzt kennenlernen. Es wird durch die Vorzeichenvektoren eines Gitters definiert.

Beispiel 2.3.2. (Die Covektoren eines Gitters)

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein d -dimensionales Gitter. Die Menge der Vorzeichenvektoren des Gitters $\mathcal{V}^* := \{\text{SIGN}(\mathbf{v}) = (\text{sgn}(v_1), \dots, \text{sgn}(v_n)) \in \{-, 0, +\}^n : \mathbf{v} \in L\}$ erfüllt die Covektoraxiome. Das dadurch definierte orientierte Matroid $\mathcal{M}(L)$ besitzt den Rang d .

Beweis. Daß die Axiome (V1) und (V2) von der Menge \mathcal{V}^* eingehalten werden, ist offensichtlich.

(V3) Es seien $X, Y \in \mathcal{V}^*$ Vorzeichenvektoren und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$ Gittervektoren mit $X = \text{SIGN}(\mathbf{v})$ und $Y = \text{SIGN}(\mathbf{w})$. Wähle $\alpha := \max_{i=1, \dots, n} \{|w_i|\} + 1$. Dann ist $\text{SIGN}(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}) = X \circ Y$.

(V4) Es seien $X = \text{SIGN}(\mathbf{v}), Y = \text{SIGN}(\mathbf{w}) \in \mathcal{V}^*$ Vorzeichenvektoren und $i \in S(X, Y)$. Wähle *positive* ganze Zahlen α, β mit $\alpha v_i = \beta w_i$. Dann erfüllt der Vorzeichenvektor $Z := \text{SIGN}(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})$ die geforderte Bedingung.

Das orientierte Matroid $\mathcal{M}(L)$ besitze den Rang r . Es sei $\mathbf{0} < X^1 < X^2 < \dots < X^r$ eine maximale aufsteigende Kette von Covektoren des orientierten Matroids $\mathcal{M}(L)$. Gittervektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ mit $X^i = \text{SIGN}(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, r$, müssen linear unabhängig sein. Somit ist $r \leq d$. Umgekehrt lassen sich mit Hilfe des ganzzahligen GAUSS-Algorithmus aus einer Basis $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ von L linear unabhängige Gittervektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ mit $\mathbf{0} < \text{SIGN}(\mathbf{v}_1) < \text{SIGN}(\mathbf{v}_2) < \dots < \text{SIGN}(\mathbf{v}_d)$ berechnen: Genauer wird die Matrix $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)^t \in \mathbb{R}^{d \times n}$ zuerst durch ganzzahlige, zeilenweise Transformationen in eine Matrix der Form $(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \mid *) \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, gebracht. Anschließend wird sie erneut von unten aufgerollt, so daß sie Zeilenstufenform besitzt und die Zeilenvektoren paarweise konform sind. Also gilt auch $r \geq d$. \diamond

Eine etwas allgemeinere Definition, die manchmal Vereinfachung in der Notation beschafft, geht von einer endlichen Indexmenge E und von Untergittern von $\bigoplus_{e \in E} \mathbb{Z}$ aus. Falls wir von \mathbb{Z}^n sprechen, dann meinen wir eigentlich $\bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Z}$.

In der linearen Algebra wird häufig ein Dimensionsargument verwendet: Wenn zwei Untervektorräume gleicher endlicher Dimension gegeben sind und der eine im anderen enthalten ist, dann stimmen sie überein. Ein solches Dimensionsargument gibt es auch in der Theorie der orientierten Matroide (unter dem Deckmantel „every rank preserving strong map is the identity“).

Proposition 2.3.3. Es seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zwei orientierte Matroide vom selben Rang. Falls die Menge der Covektoren \mathcal{V}_1^* von \mathcal{M}_1 in der Menge der Covektoren \mathcal{V}_2^* von \mathcal{M}_2 enthalten ist, dann stimmen sie sogar überein.

Beweis. Dies ist übrigens Exercise 7.25 aus [BVSZ93]. Wenn man diese Übung nicht als mathematische sondern als bibliographische auffaßt, kann man Corollary 7.3.4 und Proposition 7.3.6 aus [Oxl92] zitieren. \diamond

Die Cokreise eines orientierten Matroids

Jeder Covektor eines orientierten Matroids ist Supremum einer Menge von minimalen Elementen seines Covektorverbandes. Die Atome des Covektorverbandes eines orientierten Matroids werden Cokreise genannt. Für die Menge der Cokreise eines orientierten Matroids läßt sich auch ein Axiomensystem aufstellen.

Definition 2.3.4. Es seien E eine endliche Menge und \mathcal{C}^* eine Teilmenge der Vorzeichenvektoren über E . Die Menge \mathcal{C}^* ist die Menge der Cokreise eines orientierten Matroids \mathcal{M} , falls die nachfolgenden Axiome erfüllt sind:

$$(C1) \mathbf{0} \notin \mathcal{C}^*.$$

$$(C2) X \in \mathcal{C}^* \implies -X \in \mathcal{C}^*.$$

$$(C3) X, Y \in \mathcal{C}^*, \underline{X} \subseteq \underline{Y} \implies X = \pm Y.$$

$$(C4) X, Y \in \mathcal{C}^*, X \neq Y, e \in S(X, Y) \implies \exists Z \in \mathcal{C}^* : Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}, Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}.$$

Die Cokreise eines orientierten Matroids können mit Hilfe der Covektoren bestimmt werden, und umgekehrt: Die Cokreise sind die Covektoren mit minimalem Träger, und die Covektoren sind die endlichen Produkte von Cokreisen.

Proposition 2.3.5. Es seien \mathcal{V}^* die Covektoren und \mathcal{C}^* die Cokreise eines orientierten Matroids \mathcal{M} . Dann gilt

$$i) \mathcal{C}^* = \{X \in \mathcal{V}^* \setminus \{\mathbf{0}\} : \forall Y \in \mathcal{V}^*, \underline{Y} \subseteq \underline{X} \implies Y = \pm X\} = \text{MIN}\{X : X \in \mathcal{V}^* \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

$$ii) \mathcal{V}^* = \{X = Y_1 \circ \dots \circ Y_n : n \in \mathbb{N}, Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{C}^*\} \cup \{\mathbf{0}\}. \text{ Es gilt sogar, daß sich jeder nicht-triviale Covektor als Produkt von paarweise zueinander konformen Cokreisen schreiben läßt.}$$

Beweis. Siehe [BVSZ93], Corollary 3.7.6. \diamond

Die Cobasen eines orientierten Matroids

Es sei \mathcal{M} ein orientiertes Matroid vom Rang r , das durch seine Cokreise \mathcal{C}^* gegeben ist. Die Menge seiner nicht-orientierten Cobasen \mathcal{B}^* ist die Menge der maximalen Teilmengen von E , die kein Element aus der Menge $\{\underline{X} : X \in \mathcal{C}^*\}$ enthalten. Jede Cobasis von \mathcal{M} besitzt die Kardinalität $|E| - r$. Mit Hilfe von sogenannten Chirotopen kann man den Cobasen eine Orientierung geben und zeigen, daß ein geeignetes Axiomensystem zu dem Covektor- bzw. zu dem Cokreisaxiomensystem „cryptomorph“ ist. Allerdings benötigen wir dies später nicht, so daß Interessierte mal wieder auf [BVSZ93] (Chapter 3.5: Basis orientations and chirotopes) verwiesen werden.

Wir müssen nur wissen, daß jede Cobasis B zusammen mit einem Element $e \in E$, das nicht in der Cobasis enthalten ist, einen Cokreis, den sogenannten *Fundamentalcokreis* von e bzgl. B , eindeutig bestimmt.

Lemma 2.3.6. Es seien \mathcal{M} ein orientiertes Matroid über E und \mathcal{B}^* die Menge seiner Cobasen. Zu einer Cobasis $B \in \mathcal{B}^*$ und einem Element $e \in E \setminus B$ gibt es genau einen Cokreis X von \mathcal{M} mit $\underline{X} \subseteq B \cup \{e\}$ und $X_e = 1$.

Beweis. Siehe Corollary 1.2.6 in [Oxl92]. \diamond

Dieses Lemma wenden wir direkt mal an. Es ist zu beachten, daß wir Vorzeichenvektoren über der Menge $\{1, \dots, n\}$ gleichzeitig als Gittervektoren von \mathbb{Z}^n ansehen.

Proposition 2.3.7. (siehe [Ger82])

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter, das von Cokreisen von $\mathcal{M}(L)$ erzeugt wird. Mit $\mathcal{B}^* \subseteq 2^{\{1, \dots, n\}}$ bezeichnen wir die Menge der Cobasen von $\mathcal{M}(L)$. Es sei ein $B \in \mathcal{B}^*$ gegeben. Die Menge $\{v_i \in L : i \in \{1, \dots, n\} \setminus B, \text{ wobei } v_i \text{ der zu } B \cup \{i\} \text{ gehörende Cokreis ist}\}$, ist eine Basis von L .

Beweis. Die lineare Unabhängigkeit folgt unmittelbar aus der Gleichung $v_{ij} = \delta_{ij}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus B$. Nun stellen wir einen Gittervektor $w \in L$ als Linearkombination der v_i dar: Definiere $u := w - \sum_{\{1, \dots, n\} \setminus B} w_i v_i$. Dann gilt $u_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \setminus B$. Also ist $\underline{u} \subseteq B$ und damit $u = 0$. \diamond

2.3.2 Dualität von orientierten Matroiden

Zwei Vorzeichenvektoren $X, Y \in \{-, 0, +\}^E$ heißen *zueinander orthogonal* (Notation: $X \perp Y$), wenn entweder $\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset$ gilt oder wenn es $e, f \in \underline{X} \cap \underline{Y}$ mit $X_e Y_e = -X_f Y_f$ gibt.

Theorem 2.3.8. Es sei \mathcal{M} ein orientiertes Matroid vom Rang r , das durch die Covektoren \mathcal{V}^* gegeben ist. Dann ist

$$\mathcal{V} := \{Y \in \{-, 0, +\}^E : \text{für alle } X \in \mathcal{V}^* \text{ gilt } X \perp Y\}$$

die Menge der Covektoren eines orientierten Matroids \mathcal{M}^* vom Rang $|E| - r$. Darüber hinaus gilt $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$.

Beweis. Siehe [BVSZ93], Proposition 3.7.12. \diamond

Das Matroid \mathcal{M}^* heißt das zu \mathcal{M} *duale Matroid*. Die Covektoren \mathcal{V} von \mathcal{M}^* werden auch die *Vektoren* von \mathcal{M} und die Cokreise \mathcal{C} von \mathcal{M}^* werden auch die *Kreise* von \mathcal{M} genannt.

2.3.3 Minoren von orientierten Matroiden

Durch die Operationen Deletion und Kontraktion entstehen aus einem gegebenen orientierten Matroid \mathcal{M} neue orientierte Matroide, die sogenannten Minoren von \mathcal{M} .

Die *Restriktion* eines Vorzeichenvektors $X \in \{-, 0, +\}^E$ auf die Teilmenge $A \subseteq E$ ist der Vorzeichenvektor $X|_A \in \{-, 0, +\}^A$ mit $(X|_A)_e = X_e$ für alle $e \in A$.

Definition 2.3.9. Es sei \mathcal{M} ein orientiertes Matroid über E mit den Covektoren \mathcal{V}^* . Für eine Teilmenge $S \subseteq E$ definiere

i) die Menge der Covektoren der *Deletion* $\mathcal{M} \setminus S$ durch

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{M} \setminus S) := \{X|_{E \setminus S} : X \in \mathcal{V}^*\} \subseteq \{-, 0, +\}^{E \setminus S}.$$

ii) die Menge der Covektoren der *Kontraktion* \mathcal{M} / S durch

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{M} / S) := \{X|_{E \setminus S} : X \in \mathcal{V}^* \text{ und } S \subseteq X^0\} \subseteq \{-, 0, +\}^{E \setminus S}.$$

Die Cokreise sind dann

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(\mathcal{M}\setminus S) &= \text{MIN}\{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{C}^*\}, \\ \mathcal{C}^*(\mathcal{M}/S) &= \{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{C}^* \text{ und } S \subseteq X^0\}. \end{aligned}$$

Andererseits sind die Kreise und Vektoren der Deletion und Kontraktion von \mathcal{M} dann

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{M}\setminus S) &= \{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{V} \text{ und } S \subseteq X^0\}, \\ \mathcal{C}(\mathcal{M}\setminus S) &= \{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{C} \text{ und } S \subseteq X^0\}, \\ \mathcal{V}(\mathcal{M}/S) &= \{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{V}\}, \\ \mathcal{C}(\mathcal{M}/S) &= \text{MIN}\{X_{|E\setminus S} : X \in \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen noch einige Rechenregeln zur Kenntnis. Für disjunkte Teilmengen S, T von E gilt

- i) $\mathcal{M}/S = (\mathcal{M}^*\setminus S)^*$.
- ii) $(\mathcal{M}\setminus S)\setminus T = \mathcal{M}\setminus(S \cup T) = (\mathcal{M}\setminus T)\setminus S$.
- iii) $(\mathcal{M}/S)/T = \mathcal{M}/(S \cup T) = (\mathcal{M}/T)/S$.
- iv) $(\mathcal{M}\setminus S)/T = (\mathcal{M}/T)\setminus S$.

Ein orientiertes Matroid, das durch eine Folge von Deletionen und Kontraktionen aus einem orientierten Matroid \mathcal{M} hervorgebracht wird, heißt *Minor* von \mathcal{M} . Jeder Minor \mathcal{M}' von \mathcal{M} kann durch eine Kontraktion mit anschließender Deletion (bzw. durch eine Deletion mit anschließender Kontraktion) gewonnen werden: $\mathcal{M}' = \mathcal{M}\setminus S/T = \mathcal{M}/T\setminus S$ mit $S \cap T = \emptyset$.

2.3.4 Gerichtete Graphen: Bedeutung von $\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{C}^*, \mathcal{V}^*$

Gewöhnliche Matroide, die wir hier nicht definieren wollen, wurden von HASSLER WHITNEY 1935 eingeführt, um das Prinzip der Abhängigkeit/Unabhängigkeit, wie es in der linearen Algebra auftritt, zu abstrahieren, damit es z.B. auf die Theorie der ungerichteten Graphen angewendet werden kann. Dieses Vorhaben hat sich nicht zuletzt in der Terminologie niedergeschlagen.

In diesem Sinne ist durch einen gerichteten Graph ein orientiertes Matroid definiert. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$. Ein ungerichteter Kreis von G ist eine Folge von Kanten, die einen geschlossenen Pfad bilden, in dem jeder durchlaufene Knoten die Valenz 2 besitzt. Ein ungerichteter Kreis läßt sich auf genau zwei Arten orientieren, so daß er zwei Vorzeichenvektoren $X, -X \in \{-, 0, +\}^E$ liefert. Die Menge der so gewonnenen Vorzeichenvektoren erfüllt die Axiome (C1) bis (C4). Wir haben es also mit einem orientierten Matroid zu tun, das mit $\mathcal{M}(G)$ bezeichnet wird. Die Menge der gerichteten Kreise bildet das System der Kreise von $\mathcal{M}(G)$. Das System der Vektoren von $\mathcal{M}(G)$ erhält man mit Hilfe von Proposition 2.3.5.

Die Kreise des zu $\mathcal{M}(G)$ dualen orientierten Matroids erhält man durch die minimalen Schnitte von G . Ein *minimaler Schnitt* von G ist eine Partition $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ der Knotenmenge von G , so daß Weglassen sämtlicher Kanten zwischen V_1 und V_2 die Anzahl der (ungerichteten) Zusammenhangskomponenten um genau Eins erhöht. Einem minimalen Schnitt $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ wird ein Vorzeichenvektor $X \in \{-, 0, +\}^E$ wie folgt zugeordnet: für $e = (v_1, v_2) \in E$ ist

$$X_e := \begin{cases} + & \text{falls } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \\ - & \text{falls } v_2 \in V_1, v_1 \in V_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge der so festgelegten Vorzeichenvektoren bildet das System der Cokreise von $\mathcal{M}(G)$. Das System der Covektoren von $\mathcal{M}(G)$ kann erneut mit Hilfe von Proposition 2.3.5 bestimmt werden.

Der Rang von $\mathcal{M}(G)$ beträgt stets $|V| - \omega(G)$, wobei $\omega(G)$ für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G steht. Durch *Deletion* einer Kante $e \in E$ in G entsteht der neue gerichtete Graph $G \setminus \{e\} = (V, E \setminus \{e\})$. Es gilt $\mathcal{M}(G \setminus \{e\}) = \mathcal{M}(G) \setminus \{e\}$. Durch *Kontraktion* einer Kante $e = (v_1, v_2) \in E$ zu einem Knoten entsteht der neue gerichtete Graph $G/\{e\}$. Es gilt $\mathcal{M}(G/\{e\}) = \mathcal{M}(G)/\{e\}$.

Ein orientiertes Matroid \mathcal{M} , zu dem es einen gerichteten Graph G mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ gibt, heißt *graphisch*. Nicht jedes orientierte Matroid ist graphisch, so ist z.B. die Klasse der graphischen orientierten Matroide nichtmals unter Dualitätbildung abgeschlossen.

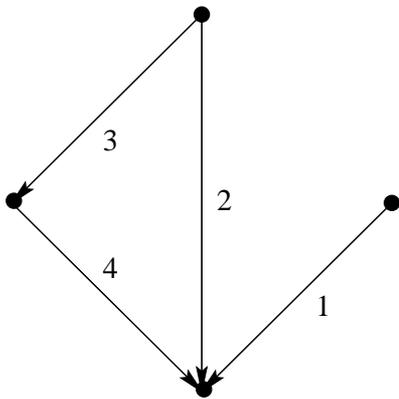
Theorem 2.3.10. Es sei G ein gerichteter Graph. Genau dann ist $\mathcal{M}^*(G)$ ein graphisches orientiertes Matroid, falls G planar ist.

Beweis. Siehe [Oxl92], Theorem 5.2.2. ◇

Ein orientiertes Matroid \mathcal{M} , zu dem es einen gerichteten Graphen G mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*(G)$ gibt, heißt *cographisch*.

Beispiel 2.3.11. (Das orientierte Matroid des Graphs von Beispiel 2.2.19)

Zum Abschluß sehen wir uns das orientierte Matroid eines konkreten Graph an. Wir geben den Kanten des DELONE-Graphs aus Beispiel 2.2.19 beliebige Richtungen.



Die Covektoren \mathcal{V}^* von $\mathcal{M}(G)$ sind bis auf $\mathbf{0}$ in der folgenden Tabelle aufgelistet. In der ersten Spalte befinden sich die Cokreise von $\mathcal{M}(G)$. Es ist $r(\mathcal{M}(G)) = 3$.

+	0	0	0	+	+	0	+	+	+	+	+
0	+	0	+	+	+	+	0	+	+	-	+
0	+	+	0	+	0	+	-	+	+	+	-
0	0	+	-	+	-	0	-	+	-	+	-
-	0	0	0	+	-	-	0	+	-	-	-
0	-	0	-	+	0	-	+	+	-	-	+
0	-	-	0	0	+	+	+	-	-	+	-
0	0	-	+	0	+	-	+	-	-	+	-
				0	+	+	-	-	-	-	+
				-	-	0	-	-	+	-	+
				-	-	-	0	-	+	+	+
				-	0	-	+	-	+	+	-
				-	+	+	0				
				-	0	+	-				
				0	-	-	-				
				0	-	+	-				
				0	-	-	+				

2.3.5 Vektorkonfigurationen: Bedeutung von $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{V}^*, \mathcal{C}^*$

Durch Konfigurationen von endlich vielen Vektoren in einem endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum wird die Klasse der *realisierbaren* (oder vielleicht besser: reellisierbaren) orientierten Matroide definiert. Die Klasse der realisierbaren orientierten Matroide ist unter Dualitätbildung abgeschlossen. Sie umfaßt nicht die gesamte Klasse der orientierten Matroide. Die Klassen der graphischen und der cographischen orientierten Matroide sind aber in der Klasse der realisierbaren orientierten Matroide echt enthalten.

Es sei eine Vektorkonfiguration von n Vektoren im \mathbb{R}^d in Form einer Matrix $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ gegeben. Durch die Vektorkonfiguration S wird auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ ein orientiertes Matroid $\mathcal{M}(S)$ definiert, wobei

- $\mathcal{V}(S) := \{X = (\text{sgn}(\lambda_1), \dots, \text{sgn}(\lambda_n)) \in \{-, 0, +\}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{s}_i = 0 \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}\},$
- $\mathcal{C}(S) = \text{MIN}\{X : X \in \mathcal{V}(S) \setminus \{\mathbf{0}\}\},$
- $\mathcal{V}^*(S) = \{X = (\text{sgn}(f(\mathbf{s}_1)), \dots, \text{sgn}(f(\mathbf{s}_n))) \in \{-, 0, +\}^n : f \in (\mathbb{R}^d)^*\},$
- $\mathcal{C}^*(S) = \text{MIN}\{X : X \in \mathcal{V}^*(S) \setminus \{\mathbf{0}\}\},$

die Systeme der Vektoren, Kreise, Covektoren und Cokreise von $\mathcal{M}(S)$ bilden. Der Rang von $\mathcal{M}(S)$ entspricht dem Matrixrang von S . Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Index. Definiere die Deletion durch $S \setminus \{i\} := (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{i-1}, \mathbf{s}_{i+1}, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}$ und die Kontraktion durch $S / \{i\} := (\pi(\mathbf{s}_1), \dots, \pi(\mathbf{s}_{i-1}), \pi(\mathbf{s}_{i+1}), \dots, \pi(\mathbf{s}_n)) \in \mathbb{R}^{d \times (n-1)}$, wobei π die orthogonale Projektion mit Kern $\pi = \mathbb{R}\mathbf{s}_i$ ist. Dann gilt $\mathcal{M}(S \setminus \{i\}) = \mathcal{M}(S) \setminus \{i\}$ und $\mathcal{M}(S / \{i\}) = \mathcal{M}(S) / \{i\}$.

Beispiel 2.3.12. Die orientierten Matroide der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

und des gerichteten Graphs aus Beispiel 2.3.11 stimmen überein.

2.3.6 Einfache orientierte Matroide

Es sei \mathcal{M} ein orientiertes Matroid. Etwas lästig, aber unabdingbar sind die *Loops* (Träger von Kreisen der Länge 1) und die *parallelen Elemente* (Träger von Kreisen der Länge 2) von \mathcal{M} . Ein *einfaches* orientiertes Matroid dagegen hat weder *Loops* noch *parallele Elemente*.

Falls $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ für einen gerichteten Graph $G = (V, E)$ ist, dann sind die *Loops* von \mathcal{M} genau die Schlingen (eine Schlinge von G ist eine Kante der Form $(v, v) \in E$) und die *parallelen Elemente* von $\mathcal{M}(G)$ sind genau die *Doppelkanten* (eine *Doppelkante* von G sind zwei Kanten der Form $(v, v') \in E$ und $(v', v) \in E$).

Falls $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S)$ für eine Vektorkonfiguration $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ist, dann sind die *Loops* von \mathcal{M} genau die *Nullvektoren* und die *parallelen Elemente* genau die *zueinander parallelen Vektoren*, die in S auftreten.

Nachdem wir beschrieben haben, wie *Loops* und *parallele Elemente* anhand der *Covektoren* von \mathcal{M} charakterisiert werden können, geben wir eine Konstruktion an, die \mathcal{M} zu einem *einfachen orientierten Matroid* $\tilde{\mathcal{M}}$ macht, das *wesentliche Eigenschaften* von \mathcal{M} erbt.

Proposition 2.3.13. Es sei \mathcal{M} ein orientiertes Matroid über der Menge E . Es ist $e \in E$ genau dann ein *Loop* von \mathcal{M} , wenn für alle *Covektoren* X von \mathcal{M} gilt $X_e = 0$. Es ist $\{e, f\} \subseteq E$, $e \neq f$, genau dann ein *paralleles Element*, wenn entweder für alle *Covektoren* von \mathcal{M} die Gleichung $X_e = X_f$ oder für alle *Covektoren* von \mathcal{M} die Gleichung $X_e = -X_f$ erfüllt ist.

Es sei E_0 die Menge der *Loops* von \mathcal{M} . Für ein $e \in E \setminus E_0$ definiere die *Parallelenklasse*

$$\bar{e} = \{f \in E \setminus E_0 : \{e, f\} \text{ ist ein paralleles Element}\}$$

und die Menge $\bar{E} := \{\bar{e} : e \in E \setminus E_0\}$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß für ein *paralleles Element* $\{e, f\}$ immer $X_e = X_f$ für alle *Covektoren* X von \mathcal{M} gilt.

Einem Covektor $X \in \{-, 0, +\}^E$ läßt sich ein Vorzeichenvektor $\bar{X} \in \{-, 0, +\}^E$ durch $\bar{X}_e = X_e$, $e \in E$, zuordnen. Dann erfüllt die Menge $\tilde{\mathcal{V}}^* = \{\bar{X} \in \{-, 0, +\}^E : X \in \mathcal{V}^*\}$ die Covektoraxiome. Dadurch wird ein einfaches orientiertes Matroid \tilde{M} definiert, dessen Covektorverband isomorph zu dem Covektorverband von \mathcal{M} ist (Lemma 4.11, [BVSZW93]).

2.3.7 Reguläre orientierte Matroide

In diesem Abschnitt schauen wir uns die orientierten Matroide, die bei Vektorkonfigurationen auftreten, genauer an. Wir überlegen uns, wann zwei Vektorkonfigurationen dasselbe orientierte Matroid bestimmen, d.h. wann für zwei Matrizen $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $S' \in \mathbb{R}^{d' \times n}$ z.B. $\mathcal{C}(S) = \mathcal{C}(S')$ (und damit $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(S')$, $\mathcal{V}^*(S) = \mathcal{V}^*(S')$, etc.) gilt.

Proposition 2.3.14. Es seien $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix, $A \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{R})$ eine reguläre Matrix und $D \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix, deren sämtlichen Diagonalelemente positiv sind. Dann gilt $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(ASD)$. Es sei $S' \in \mathbb{R}^{d' \times n}$, $d' \geq d$, eine weitere Matrix, die aus S durch Anfügen von $d' - d$ Nullzeilen entsteht. Dann gilt $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(S')$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Vektoren von $\mathcal{M}(S)$. ◇

Die Umkehrung von Proposition 2.3.14 ist falsch. Falls $S, S' \in \mathbb{R}^{d \times n}$ Vektorkonfigurationen mit gleichem orientierten Matroid sind, gibt es im allgemeinen keine reguläre Matrix $A \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{R})$ und keine positive Diagonalmatrix $D \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S' = ASD$. Ein Gegenbeispiel ist Example 6.3.12 in [Ox192].

Als nächstes betrachten wir eine Klasse von orientierten Matroiden, die einerseits in der Klasse der realisierbaren echt enthalten ist und andererseits die Klasse der graphischen orientierten Matroide umfaßt, für die die Umkehrung von Proposition 2.3.14 erfüllt ist.

Definition 2.3.15. Eine *unimodulare Matrix* $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ist eine Matrix, deren maximale Minoren alle in der Menge $\{-1, 0, +1\}$ enthalten sind. Das orientierte Matroid $\mathcal{M}(S)$ einer unimodularen Matrix S heißt *regulär* (oder auch manchmal *unimodular*).

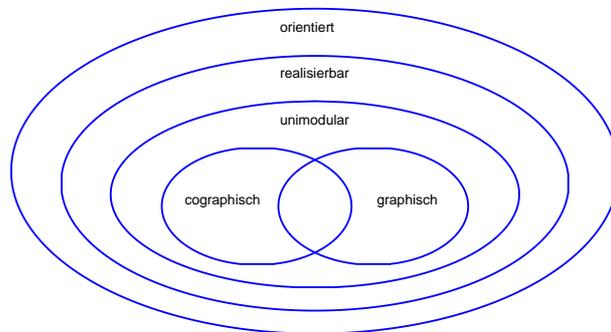
Theorem 2.3.16. Es sei eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$ gegeben, für die das orientierte Matroid $\mathcal{M}(S)$ regulär ist. Falls das orientierte Matroid der Matrix $S' \in \mathbb{R}^{d \times n}$ mit $\mathcal{M}(S)$ übereinstimmt, dann gibt es eine reguläre Matrix $A \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonalelementen, die die Gleichung $S' = ASD$ erfüllen. Man sagt dann auch, daß die Matrizen S und S' *projektiv äquivalent* sind.

Beweis. Siehe [BL76], Theorem 3.7. ◇

Ein Ergebnis aus dem Jahr 1957 (KORKINE und ZOLOTAREV haben es allerdings auch schon 1877 bewiesen), das auf ISODORE HELLER zurückgeht und das in Proposition 13.4.4 [Ox192] noch allgemeiner formuliert wird, ist eine scharfe obere Schranke für die Kardinalität der Indexmenge eines regulären orientierten Matroids bei vorgegebenem Rang.

Proposition 2.3.17. Es sei \mathcal{M} ein einfaches reguläres orientiertes Matroid vom Rang r über der Indexmenge E . Dann gilt die Abschätzung $|E| \leq \binom{r+1}{2}$. Sie ist genau dann scharf, wenn \mathcal{M} gleich $\mathcal{M}(K_{r+1})$ ist, wobei K_{r+1} ein entsprechend \mathcal{M} gerichteter vollständiger Graph mit $r + 1$ Knoten ist.

Zum Abschluß resümieren wir die Inklusionsbeziehungen der Klassen der orientierten Matroide, die wir hier kennengelernt haben, in Form eines VENN-Diagramms.



2.4 Zonotope

Zonotope sind Polytope mit besonderen geometrischen und kombinatorischen Eigenschaften. Ein Zonotop entsteht als Bild einer affinen Projektion des n -dimensionalen Einheitswürfels. Sie werden in [BVSZ93], Abschnitt 2.2 und in [Zie95], Abschnitt 7.3 ausführlich behandelt. Wir stellen hier eine Auswahl der Fakten zusammen, die wir im späteren Verlauf noch benötigen werden.

Definition 2.4.1. Es seien $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor, $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix und

$$\varphi_{\mathbf{y}, S} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{y} + S\mathbf{x} \end{cases}$$

die durch \mathbf{y} und S gegebene affine Abbildung. Das Bild $Z(\mathbf{y}, S) := \varphi_{\mathbf{y}, S}([-1, +1]^n)$ des Einheitswürfels $[-1, +1]^n$ unter $\varphi_{\mathbf{y}, S}$ heißt *Zonotop*. Falls $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist, schreiben wir φ_S anstatt von $\varphi_{\mathbf{0}, S}$, bzw. $Z(S)$ anstatt von $Z(\mathbf{0}, S)$.

Zonotope können auch anders beschrieben werden. So lassen sie sich als MINKOWSKI-Summe von endlich vielen Strecken schreiben: $Z(\mathbf{y}, S) = \mathbf{y} + [-\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1] + \dots + [-\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n]$.

Eine weitere Charakterisierung ist, daß die Zonotope genau die Polytope sind, deren sämtlichen Seiten zentralsymmetrisch sind. Es gilt sogar, daß jedes d -dimensionale Polytop, dessen k -Seiten alle zentralsymmetrisch sind, für ein $k \in \{2, \dots, d-2\}$, ein Zonotop ist ([BVSZ93], Proposition 2.2.14).

In diesem Abschnitt stehen die kombinatorischen Eigenschaften von Zonotopen im Vordergrund. Wir werden sehen, daß Zonotope ein Modell für die realisierbaren orientierten Matroide bilden.

Einer Seite $F \neq \emptyset$ von $Z(S)$ ordnen wir den Vorzeichenvektor $X \in \{-, 0, +\}^n$ zu: X ist der Mittelpunkt der Seite $\varphi_S^{-1}(F)$ des Einheitswürfels $[-1, +1]^n$. Daß $\varphi_S^{-1}(F)$ eine Seite ist, wurde schon in Lemma 2.1.2 gezeigt. Welche Vorzeichenvektoren bei einem Zonotop $Z(S)$ auftreten, hängt natürlich nur von S ab. Die nachfolgende Proposition gibt den Zusammenhang zwischen den Vorzeichenvektoren und der Matrix S an.

Proposition 2.4.2. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix, die keine Nullspalte enthält. Es sei $f \in (\mathbb{R}^d)^*$ eine Linearform. Der Vorzeichenvektor $X = (\text{sgn}(f(\mathbf{s}_1)), \dots, \text{sgn}(f(\mathbf{s}_n))) \in \{-, 0, +\}^n$ ist der Mittelpunkt der Seite $\varphi_S^{-1}(F_f(Z(S))) \subseteq [-1, +1]^n$ des Einheitswürfels.

Beweis. Die Seite $F = \sum_{i \in X^+} \mathbf{e}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{e}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i]$ des Einheitswürfels $[-1, +1]^n$ besitzt den Mittelpunkt X . Somit müssen wir die Gleichung $F = \varphi_S^{-1}(F_f(Z(S)))$ einsehen. Wir zeigen zunächst $\varphi_S(F) = F_f(Z(S))$ und überlegen anschließend, daß daraus die gewünschte Gleichung folgt.

Auf der einen Seite gilt

$$\varphi_S(F) = \varphi_S \left(\sum_{i \in X^+} \mathbf{e}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{e}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i] \right) = \sum_{i \in X^+} \mathbf{s}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{s}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i],$$

und auf der anderen Seite gilt nach Lemma 2.1.3 und Lemma 2.1.4, daß $F_f(Z(S))$ die Seite von $Z(S)$ ist, auf der f in $Z(S)$ sein Maximum annimmt:

$$\begin{aligned} F_f(Z(S)) &= F_f([- \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1] + \dots + [- \mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n]) \\ &= F_f([- \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1]) + \dots + F_f([- \mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n]) \\ &= \sum_{i \in X^+} \mathbf{s}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{s}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]. \end{aligned}$$

Nun ist noch die Gleichung $F = \varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))$ zu zeigen. Die Inklusion $F \subseteq \varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))$ ist auf jeden Fall erfüllt. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion wird dagegen die Voraussetzung, daß S keine Nullspalte enthält, benötigt. Angenommen es ist $F \neq \varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))$. Nach unserer obigen Überlegung ist $\varphi_S(F) = F_f(Z(S))$ eine Seite von $Z(S)$, also ist nach Lemma 2.1.2 $\varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))$ eine Seite von $[-1, +1]^n$. Sie habe den Mittelpunkt $Y \in \{-, 0, +\}^n$. Da sie F echt enthält, gilt $X^0 \subseteq Y^0$ und $X^0 \cap Y^0 \neq \emptyset$. Allgemein gilt die Inklusion

$$\varphi_S(\varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))) \subseteq \varphi_S(F) = \sum_{i \in X^+} \mathbf{s}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{s}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]. \quad (2.1)$$

Die linke Seite von (2.1) ist

$$\begin{aligned} \varphi_S(\varphi_S^{-1}(\varphi_S(F))) &= \varphi_S \left(\sum_{i \in Y^+} \mathbf{e}_i - \sum_{i \in Y^-} \mathbf{e}_i + \sum_{i \in Y^0} [-\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i] \right) \\ &= \sum_{i \in Y^+} \mathbf{s}_i - \sum_{i \in Y^-} \mathbf{s}_i + \sum_{i \in Y^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]. \end{aligned}$$

Da $X^0 \subseteq Y^0$, $X^0 \cap Y^0 \neq \emptyset$ und $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$, ist, ist das Zonotop $\sum_{i \in X^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]$ echt im Zonotop $\sum_{i \in Y^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]$ enthalten, im Widerspruch zur Inklusion (2.1). \diamond

Proposition 2.4.3. Ein 2-dimensionales Zonotop Z , das durch eine Matrix $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{2 \times n}$, in der je zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind, definiert ist, ist ein zentralsymmetrisches $2n$ -Eck.

Beweis. Wir zeigen, daß das Zonotop genau $2n$ Kanten besitzt. Zu \mathbf{s}_i wählen wir eine Linearform $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ mit $f(\mathbf{s}_i) = 0$. Dann sind $\pm F_f(Z)$ Kanten von Z , die parallel zu \mathbf{s}_i verlaufen. Jede Kante von Z entsteht auf diese Weise. \diamond

Wenn man Proposition 2.4.2 in der Sprache der orientierten Matroide interpretiert, wird klar herausgestellt, wie die Matrix S die kombinatorischen Eigenschaften des Zonotops $Z(S)$ bestimmt. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix, die keine Nullspalte enthält. Einem Covektor $X \in \mathcal{V}^*$ von $\mathcal{M}(S)$ ist die Seite

$$\text{face}(X) := \sum_{i \in X^+} \mathbf{s}_i - \sum_{i \in X^-} \mathbf{s}_i + \sum_{i \in X^0} [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i] \in \mathcal{F}(Z(S))$$

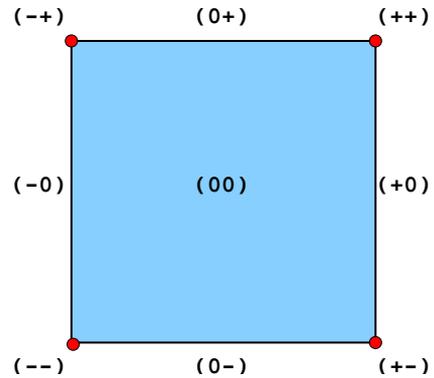
zugeordnet. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \hat{\mathcal{V}}^* & \rightarrow \mathcal{F}(Z) \\ X & \mapsto \text{face}(X) \end{cases} \quad \text{mit } \Phi(\hat{\mathbf{1}}) := \emptyset,$$

bijektiv und ordnungsumkehrend. Somit ist der Covektorverband des orientierten Matroids $\mathcal{M}(S)$ antiisomorph zu dem Seitenverband $(\mathcal{F}(Z(S)), \subseteq)$ des Zonotops $Z(S)$. Die Cokreise von $\mathcal{M}(S)$ stehen in bijektiver Korrespondenz zu den Facetten von $Z(S)$. Zwei Covektoren sind genau dann zueinander konform, wenn der Durchschnitt ihrer zugehörigen Seiten nicht die leere Menge ist.

Beispiel 2.4.4.

Die kombinatorische Struktur des Würfels $[-1, 1]^n$ ist naturgemäß besonders einfach, und wir haben sie schon im Beweis von Proposition 2.4.2 benutzt. Die Einfachheit wird auch im zugeordneten orientierten Matroid widerspiegelt: alle Vorzeichenvektoren $X \in \{-, 0, +\}^n$ sind Covektoren des orientierten Matroids und X ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Seite $\text{face}(X)$.

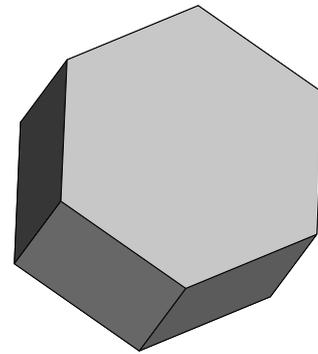


Beispiel 2.4.5.

Für die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ergibt sich als Zonotop $Z(\mathbf{0}, S)$ ein zentralsymmetrisches hexagonales Prisma. Die Covektoren des orientierten Matroids $\mathcal{M}(S)$ haben wir schon in Beispiel 2.3.11 gesehen.



Das Volumen von $Z(S)$ berechnen wir gleich zweimal. Einerseits wird das Zonotop in Paralleleotope unterteilt (Stichwort: cubical subdivision) und deren Volumina aufsummiert. Andererseits kann man das Volumen aus der Kenntnis der Volumina von $Z(S \setminus \{i\})$ und $Z(S / \{i\})$ errechnen, wie man sich am besten geometrisch überlegt.

Proposition 2.4.6. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$ eine Matrix vom Rang d . Das Volumen von $Z(S)$ beträgt

$$\text{vol } Z(S) = 2^d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \text{vol } P(\mathbf{s}_{i_1}, \dots, \mathbf{s}_{i_d}),$$

dabei bezeichnet $P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \{\sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i : \alpha_i \in [0, 1]\}$ das von den Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ aufgespannte Parallelotop.

Das Volumen von $Z(S)$ läßt sich auch als

$$\text{vol } Z(S) = \text{vol}(Z(S \setminus \{i\})) + 2 \|\mathbf{s}_i\| \cdot \text{vol}(Z(S / \{i\}))$$

ausdrücken, $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Die erste Aussage ist ein Resultat von MCMULLEN (siehe auch [BVSZ93], Proposition 2.2.12). Sie werden wir mehrmals für den Beweis der zweiten Aussage verwenden.

Zum Beweis der zweiten Aussage unterscheiden wir zwei Fälle und nehmen zur Vereinfachung der Notation $i = 1$ an. Falls $\dim(Z(S \setminus \{1\})) < d$, dann ist $Z(S)$ ein Prisma mit der Grundfläche $\sum_{j=2}^n [-\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_j]$ und die Aussage ist klar. Sei also nun $\dim(Z(S \setminus \{1\})) = d$. Mit π bezeichnen wir

die orthogonale Projektion des \mathbb{R}^d auf die zu $\mathbb{R}\mathbf{s}_1$ orthogonal stehende Hyperebene. Es gilt dann (Stichwort: das Volumen eines Parallelotops ist gleich Grundfläche mal Höhe, zur Erinnerung lohnt sich ein Blick in [SS88], 77.6)

$$\begin{aligned}
& \text{vol}(Z(S \setminus \{1\})) + 2\|\mathbf{s}_1\| \cdot \text{vol}(Z(S/\{1\})) \\
= & 2^d \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \text{vol} P(\mathbf{s}_{i_1}, \dots, \mathbf{s}_{i_d}) \\
& + 2 \text{vol}(P(\mathbf{s}_1)) \cdot 2^{d-1} \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \text{vol} P(\pi(\mathbf{s}_{i_1}), \dots, \pi(\mathbf{s}_{i_{d-1}})) \\
= & 2^d \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} \text{vol} P(\mathbf{s}_{i_1}, \dots, \mathbf{s}_{i_d}) \\
& + 2^d \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} \leq n} \text{vol} P(\mathbf{s}_1) \cdot \text{vol} P(\pi(\mathbf{s}_{i_1}), \dots, \pi(\mathbf{s}_{i_{d-1}})) \\
= & \text{vol} Z(S).
\end{aligned}$$

◇

Kapitel 3

Zonotopale Gitter

Im letzten Kapitel haben wir uns davon überzeugt, daß die kombinatorischen Eigenschaften von Zonotopen am Besten im Rahmen der Theorie der orientierten Matroide studiert werden. Ein reguläres Gitter L ist eine spezielle Untergruppe von \mathbb{Z}^n , dessen zugehöriges orientiertes Matroid $\mathcal{M}(L)$ regulär ist. Falls \mathbb{Z}^n in einem euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n , in dem die Einheitsbasis eine Orthogonalbasis bildet, dann heißt L (und alle Gitter, die zu L isometrisch sind), ein zonotopales Gitter. Zonotopale Gitter sind — wie ihr Name schon andeutet — Gitter, die ein Zonotop als DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop besitzen.

Eine Besonderheit eines regulären Gitters L ist, daß die Cokreise von $\mathcal{M}(L)$ als Gittervektoren aufgefaßt werden können. Das erlaubt, die Minoren von $\mathcal{M}(L)$ als spezielle Untergitter oder Projektionen von L zu konstruieren. Mit diesen Operationen ist es dann ein Leichtes, die Länge der Kanten des DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops von L explizit zu bestimmen.

Bekannterweise gehören die graphischen und die cographischen orientierten Matroide zur Klasse der regulären orientierten Matroide. Im wesentlichen sind das auch die Grundbausteine, aus denen reguläre orientierte Matroide durch Summenbildung zusammengesetzt sind. Diese Aussage wird durch SEYMOURS Strukturtheorem für reguläre orientierte Matroide manifestiert, die wir für reguläre Gitter formulieren. Dazu ist es notwendig, von graphischen und von cographischen Gittern zu sprechen. Im übrigen sind die cographischen Gitter genau die Gitter von erster Art.

Bis zur Dimension 3 umfaßt die Klasse der zonotopalen Gitter die Klasse sämtlicher Gitter. Doch ab Dimension 4 fallen beide Klassen bei wachsender Dimension immer stärker auseinander. Wir zeigen, daß zonotopale Gitter, als positiv-definite quadratische Formen interpretiert, Kegel der L -Zerlegung von VORONOÏ sind. Zusätzlich beweisen wir, daß nur der Kegel der cographischen Gitter volldimensional ist.

Der Begriff der „zonotopalen Gitter“ ist in der einschlägigen Literatur kein etablierter Begriff. Eine kleine Historie zeigt auf, daß zonotopale Gitter schon mehrfach behandelt worden sind. Reguläre Gitter wurden zuerst von TUTTE unter dem Namen der regulären Kettengruppen studiert. GERRITZEN führte das „richtige“ Skalarprodukt ein und sprach von metrischen Matroiden. Sein Doktorand LOESCH fand heraus, daß das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop einer matroidischen quadratischen Form ein Zonotop ist. Die DELONE-Pflasterung eines zonotopalen Gitters schaute sich ERDAHL intensiv an und taufte sie ein „lattice dicing“.

3.1 Grundlagen zonotopaler Gitter

Wie schon mehrfach angedeutet sind für die Definition eines zonotopalen Gitters L zwei Ingerenzen erforderlich. Erstens muß L eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}^n, +)$ mit spezieller Struktur sein. Im wesentlichen muß die Untergruppe L so beschaffen sein, daß $\mathcal{M}(L)$ ein reguläres orientiertes Matroid ist. Durch $\mathcal{M}(L)$ werden sämtlichen kombinatorisch-geometrischen Eigenschaften des DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops von L festgelegt. Um von dem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L reden zu können, muß ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n vorhanden sein. So ist die „richtige“ Wahl des Skalarprodukts die zweite Zutat zur Definition. Darüber hinaus können die üblichen Matroidoperationen direkt für reguläre Gitter definiert werden.

3.1.1 Reguläre Gitter

Es sei ein Untergitter L von \mathbb{Z}^d sowie ein Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ gegeben (eigentlich ist L nur eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}^d, +)$). Der Träger von \mathbf{v} ist die Menge $\underline{v} := \{i \in \{1, \dots, d\} : v_i \neq 0\}$. Der Gittervektor \mathbf{v} heißt *einfach*, wenn $\mathbf{v} \in \{-1, 0, +1\}^d$ gilt. Man sagt $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ besitzt *minimalen Träger*, falls für alle $\mathbf{w} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $\underline{w} \subseteq \underline{v}$ sogar $\underline{w} = \underline{v}$ gilt. Der Gittervektor \mathbf{v} heißt *elementar*, wenn er gleichzeitig einfach ist und minimalen Träger besitzt, d.h. er ist gleichzeitig ein Cokreis des orientierten Matroids $\mathcal{M}(L)$ (siehe Beispiel 2.3.2). Zwei Gittervektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} heißen *zueinander konform*, falls immer $v_i \cdot w_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, ist.

Definition 3.1.1. Ein Untergitter L von \mathbb{Z}^d heißt *reguläres Gitter*, falls sich jeder nicht-triviale Gittervektor als Summe von elementaren und paarweise konformen Gittervektoren schreiben läßt. Insbesondere wird dann das Gitter L von den elementaren Gittervektoren erzeugt.

Weitere Charakterisierungen für reguläre Gitter erweisen sich später als sehr nützlich.

Proposition 3.1.2. (siehe [Tut71], Abschnitt 1.2)

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein Gitter. Dann sind folgenden Bedingungen äquivalent:

- i) L ist ein reguläres Gitter.
- ii) Zu jedem Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt es einen elementaren Gittervektor in L , der zu \mathbf{v} konform ist.
- iii) Für alle $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt es einen elementaren Gittervektor $\mathbf{w} \in L$ mit $\underline{w} \subseteq \underline{v}$.
- iv) Sämtliche Gittervektoren $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, die minimalen Träger besitzen, sind ganzzahliges Vielfaches eines elementaren Gittervektors.

Beweis.

i) \implies ii) \implies iii)

Hierfür benötigen wir keinen Beweis.

iii) \implies ii)

Angenommen es gibt einen Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ für den die Behauptung falsch ist. Wir wählen ein solches \mathbf{v} mit kleinstmöglichem Träger. Nach Voraussetzung gibt es einen elementaren Gittervektor \mathbf{w} mit $\underline{w} \subseteq \underline{v}$. Wähle einen Index $i \in \underline{w}$, so daß $|v_i|$ minimal ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $v_i w_i > 0$ ist. Definiere $\mathbf{u} := \mathbf{v} - v_i w_i \mathbf{w}$. Falls $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ist, dann ist \mathbf{v} ein positives Vielfaches von \mathbf{w} und insbesondere sind \mathbf{v} und \mathbf{w} zueinander konform. Falls $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ist, dann sind \mathbf{u} und \mathbf{v} zueinander konform, denn für jeden Index j gilt

$$u_j v_j = (v_j - v_i w_i w_j) v_j = v_j^2 - v_i v_j w_i w_j \geq v_j^2 - v_i v_j \geq 0.$$

Da $\underline{u} \subset \underline{v}$ ist, gibt es wegen der Minimalität von \underline{v} einen elementaren Gittervektor, der zu \underline{u} und damit auch zu \underline{v} konform ist.

ii) \implies i)

Angenommen es gibt einen Gittervektor $\underline{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$, für den die Behauptung falsch ist. Es sei ein solcher Gittervektor \underline{v} mit minimaler 1-Norm $\sum_{i=1}^d |v_i|$ gewählt. Nach Voraussetzung gibt es einen elementaren Gittervektor \underline{w} , der zu \underline{v} konform ist. Definiere $\underline{u} := \underline{v} - \underline{w}$. Falls $\underline{u} = \mathbf{0}$, ist die Sache klar. Es sei also $\underline{u} \neq \mathbf{0}$. Es gilt $\sum_{i=1}^d |u_i| < \sum_{i=1}^d |v_i|$ und \underline{u} ist zu \underline{v} konform. Dann ist \underline{u} darstellbar als Summe von elementaren und paarweise konformen Gittervektoren. Demnach ist auch \underline{v} darstellbar als Summe von elementaren und paarweise konformen Gittervektoren. Somit ist die Annahme zu einem Widerspruch geführt.

i) \implies iv) \implies iii)

Dies ist offensichtlich. \diamond

Unverzichtbar ist das

Theorem 3.1.3. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein reguläres Gitter. Dann ist $\mathcal{M}(L)$ ein reguläres orientiertes Matroid. Umgekehrt gibt es für jedes reguläre orientierte Matroid \mathcal{M} ein reguläres Gitter L , so daß $\mathcal{M} = \mathcal{M}(L)$ gilt.

Beweis. Siehe [Tut71], 5.21 und 5.23. \diamond

Im folgenden werden wir das orientierte Matroid $\mathcal{M}(L)$ unter die Lupe nehmen und uns anschauen, ob und welche regulären Gitter die orientierten regulären Matroide $\mathcal{M}^*(L)$, $\mathcal{M}(L) \setminus S$ und $\mathcal{M}(L)/S$ liefern.

Keine Probleme bereitet das Auffinden eines geeigneten regulären Gitters für das zu $\mathcal{M}(L)$ duale reguläre orientierte Matroid.

Definition 3.1.4. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$. Definiere das Untergitter

$$L^* := \{\underline{v} \in \mathbb{Z}^d : \text{für alle } \underline{w} \in \mathbb{Z}^d \text{ gilt } \sum_{i=1}^d v_i w_i = 0\}.$$

Proposition 3.1.5. Falls L ein Untergitter von \mathbb{Z}^d ist, dann gilt $\mathcal{M}^*(L) = \mathcal{M}(L^*)$. Falls L ein reguläres Gitter ist, so ist das Gitter L^* auch regulär.

Beweis. Wir weisen die Inklusion $\mathcal{V}^*(L^*) \subseteq \mathcal{V}(L)$ nach: Es sei $X \in \mathcal{V}^*(L^*)$. Wähle einen Gittervektor $\underline{v} \in L^*$ mit $X = \text{SIGN}(\underline{v})$. Desweiteren seien ein Vektor $\underline{Y} \in \mathcal{V}^*(L)$ und ein Gittervektor $\underline{w} \in L$ gegeben. Angenommen es gilt $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$. Da $\sum_{i=1}^d v_i w_i = 0$ ist, muß es zwei Indizes $i, j \in \{1, \dots, d\}$ geben, so daß $\text{sgn}(v_i) \text{sgn}(w_i) = -\text{sgn}(v_j) \text{sgn}(w_j)$. Somit ist $X_i Y_i = -X_j Y_j$, also $X \perp Y$.

Mit einem Dimensionsargument sehen wir die umgekehrte Inklusion ein: Es sei r der Rang von $\mathcal{M}(L)$, was auch gleichzeitig die Dimension von L ist. Der Rang von $\mathcal{M}^*(L)$ beträgt $d - r$. Dies ist auch gleichzeitig die Dimension von L^* , denn es gilt $\langle L \rangle_{\mathbb{Q}}^{\perp} = \langle L^* \rangle_{\mathbb{Q}}$ und die Dimension von dem Untervektorraum $\langle L \rangle_{\mathbb{Q}}^{\perp}$ ist $d - r$. Wir nehmen an, daß der Vektorraum \mathbb{R}^d mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet ist. Jetzt liefert Proposition 2.3.3 die Behauptung.

Für den Beweis der zweiten Aussage verweisen wir wieder einmal auf [Tut71], 5.24 und 5.25. \diamond

Auch die Definition von Deletion und Kontraktion von regulären Gittern ist kanonisch, wenn man von der Isomorphie zwischen $\mathbb{Z}^{\{1, \dots, d\} \setminus S} \cong \mathbb{Z}^{d-|S|}$ absieht.

Die *Restriktion* eines ganzzahligen Vektors $\underline{v} \in \mathbb{Z}^d$ auf eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \dots, d\}$ ist der ganzzahlige Vektor $\underline{v}|_A \in \mathbb{Z}^A \cong \mathbb{Z}^{|A|}$ mit $(\underline{v}|_A)_i = v_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$.

Definition 3.1.6. Es seien $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ und $S \subseteq \{1, \dots, d\}$. Definiere

i) die *Deletion* $L \setminus S$ durch

$$L \setminus S := \{\mathbf{v}_{|\{1, \dots, d\} \setminus S} : \mathbf{v} \in L\} \subseteq \mathbb{Z}^{\{1, \dots, d\} \setminus S} \cong \mathbb{Z}^{d-|S|}.$$

ii) die *Kontraktion* L/S durch

$$L/S := \{\mathbf{v}_{|\{1, \dots, d\} \setminus S} : \mathbf{v} \in L \text{ und } \underline{\mathbf{v}} \cap S = \emptyset\} \subseteq \mathbb{Z}^{\{1, \dots, d\} \setminus S} \cong \mathbb{Z}^{d-|S|}.$$

Für die orientierten Matroide gilt natürlich $\mathcal{M}(L \setminus S) = \mathcal{M}(L) \setminus S$ und $\mathcal{M}(L/S) = \mathcal{M}(L)/S$, sowie die Rechenregeln, die wir schon in Abschnitt 2.3.3 kennengelernt haben. Ein Gitter, das durch eine Folge von Deletionen und Kontraktionen aus L entsteht, heißt ein *Minor* von L . Die Klasse der regulären Gitter ist unter den Operationen Deletion und Kontraktion abgeschlossen.

Proposition 3.1.7. Es seien $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein reguläres Gitter und $S \subseteq \{1, \dots, d\}$ eine Teilmenge. Dann sind $L \setminus S$ und L/S ebenfalls reguläre Gitter.

Beweis. Die Mengen $L \setminus S$ und L/S sind diskrete Untergruppen von \mathbb{Z}^d und somit nach Proposition 2.2.2 Gitter.

Es sei \mathbf{v}' ein Gittervektor von L/S , der minimalen Träger besitzt. Es sei \mathbf{v} ein Gittervektor von L , dessen Restriktion \mathbf{v}' ergibt. Es läßt sich \mathbf{v} als Summe von paarweise zueinander konformen, elementare n Gittervektoren von L schreiben. Weil \mathbf{v}' minimalen Träger besitzt, gibt es in jeder dieser Summen genau einen elementaren Gittervektor $\mathbf{w} \in L$ mit $\underline{\mathbf{w}} \cap (\{1, \dots, d\} \setminus S) = \emptyset$ (dieser tritt in der Summe evtl. mehrfach auf). Somit ist $\underline{\mathbf{w}} \cap (\{1, \dots, d\} \setminus S) \subseteq \underline{\mathbf{v}'}$ und weiter $\underline{\mathbf{w}} \cap (\{1, \dots, d\} \setminus S) = \underline{\mathbf{v}'}$. Betrachte die Restriktion \mathbf{w}' von \mathbf{w} auf $\{1, \dots, d\} \setminus S$. Die obige Überlegung ergibt, daß \mathbf{v}' ein ganzzahliges Vielfaches von \mathbf{w}' ist.

Es sei \mathbf{v}' ein Gittervektor von L/S , der minimalen Träger besitzt. Es sei \mathbf{v} ein Gittervektor von L , dessen Restriktion \mathbf{v}' ergibt. Der Gittervektor \mathbf{v} besitzt minimalen Träger, er ist also ein ganzzahliges Vielfaches eines elementaren Gittervektors \mathbf{w} von L . Da $\underline{\mathbf{w}} \cap S = \emptyset$ ist, folgt die Regularität von L/S . \diamond

3.1.2 Reguläre Gitter mit Skalarprodukt

Bislang haben wir nur Untergruppen von $(\mathbb{Z}^d, +)$ betrachtet, ohne über Skalarprodukte zu sprechen. Ein zonotopales Gitter ist zu einem regulären Gitter, das in einem euklidischen \mathbb{R}^d lebt, in dem die Einheitsvektoren eine Orthogonalbasis bilden, isometrisch ist. Natürlich ist der Begriff „zonotopal“ nicht grundlos gewählt. Er wird aber erst durch Theorem 3.1.12 untermauert.

Definition 3.1.8. Ein Gitter M heißt *zonotopales Gitter*, wenn es zu einem regulären Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ isometrisch ist. Dabei ist \mathbb{R}^d mit einem Skalarprodukt der Form $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ mit $\lambda_i > 0$ und $1 \leq i, j \leq d$, versehen. Dabei bezeichnet \mathbf{e}_i den i -ten Einheitsvektor von \mathbb{R}^d .

Die elementaren Gittervektoren eines regulären Gitters L bzw. die Cokreise des orientierten Matroids $\mathcal{M}(L)$ bekommen durch diese Wahl des Skalarprodukts eine geometrische Bedeutung.

Proposition 3.1.9. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter. Die Menge der strikten VORONOÏ-Vektoren von L stimmt mit der Menge der elementaren Gittervektoren von L überein.

Beweis. Es sei \mathbf{v} ein strikter VORONOÏ-Vektor von L . Dieser läßt sich als Summe von paarweise zueinander konformen elementaren Gittervektoren darstellen: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i$. Dabei sei r kleinstmöglich gewählt. Angenommen es ist $r \geq 2$. Wir definieren $\mathbf{u} := \mathbf{v} - 2\mathbf{w}_1$. Dann ist $\mathbf{u} \neq -\mathbf{v}$, und es gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2(\mathbf{v}, 2\mathbf{w}_1) + (2\mathbf{w}_1, 2\mathbf{w}_1) \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 4(\mathbf{v} - \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) \end{aligned}$$

Da die \mathbf{w}_i paarweise zueinander konform sind, ist $(\mathbf{v} - \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = (\mathbf{w}_2 + \dots + \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_1) \geq 0$ und es folgt $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq (\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Dies ist ein Widerspruch zur eindeutigen Minimalität von $\pm\mathbf{v}$ in der Nebenklasse $\mathbf{v} + 2L$.

Es sei andererseits \mathbf{v} ein elementarer Gittervektor von L . Desweiteren sei ein Gittervektor \mathbf{u} in der Nebenklasse $\mathbf{v} + 2L$ gegeben, für den $\mathbf{u} \neq \pm\mathbf{v}$ gilt. Die elementaren Vektoren erzeugen das Gitter L . Demnach erzeugen die mit dem Faktor 2 skalierten elementaren Vektoren das Gitter $2L$. Alle Koeffizienten der elementaren Vektoren liegen in der Menge $\{-1, 0, +1\}$. Somit ist $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in 2L \subseteq 2\mathbb{Z}^d$. Da $v_i \in \{-1, 0, +1\}$ ist, muß $\underline{\mathbf{v}} \subseteq \underline{\mathbf{u}}$ sein, damit $u_i - v_i \in 2\mathbb{Z}$ gelten kann. Falls $\underline{\mathbf{v}} \subset \underline{\mathbf{u}}$ ist, gilt sofort $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < (\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Falls $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{u}}$ ist, gibt es wegen der Regularität von L einen Faktor $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\}$ mit $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{u}$ (Proposition 3.1.2 iv)). Wir erhalten also $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < \alpha^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$. \diamond

Bevor wir den Begriff des „zonotopalen Gitters“ verstehen können, geben wir als letzte Vorbereitung ein Lemma vom FARKAS-Typ an. Grob gesprochen ist ein Lemma vom FARKAS-Typ ein Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen Ungleichungssystems, das auf einem Dualitätsprinzip beruht.

Lemma 3.1.10. (vergleiche [Roc70], Theorem 22.6)

Es sei $L \subseteq \mathbb{R}^d$ ein zonotopales Gitter und es sei $U = \langle L \rangle_{\mathbb{R}}$ der von L erzeugte Untervektorraum. Darüber hinaus seien ein Vektor \mathbf{x} und Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gegeben. Dann gilt genau eine der beiden Bedingungen.

- i) Es gibt einen Vektor $\mathbf{y}' \in U^\perp$, der im Parallelotop $\mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i] = \mathbf{x} + ([-\alpha_1, \alpha_1] \times \dots \times [-\alpha_d, \alpha_d])$ liegt.
- ii) Es gibt einen Vektor $\mathbf{y} \in U$, so daß $(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]) > 0$ ist. D.h. für alle $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]$ gilt die Ungleichung $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$.

Falls die zweite Bedingung zutrifft, dann kann sogar ein elementarer Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ mit $(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]) > 0$ gewählt werden.

Im Beweis des Lemmas geht entscheidend HELLYs Theorem ein. Auch wenn wir es nur im Fall von Intervallen benötigen, formulieren wir es für beliebige Dimensionen, um unsere konvexgeometrische Allgemeinbildung zu stärken. Ein Beweis kann z.B. in [Roc70] nachgelesen werden.

Theorem 3.1.11. (HELLYs Theorem)

Es sei eine endliche Familie von konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d gegeben. Falls jede Teilfamilie, die höchstens $d + 1$ Elemente umfaßt, einen nichtleeren Durchschnitt besitzt, dann besitzt auch die gesamte Familie einen nichtleeren Durchschnitt.

Beweis. (von Lemma 3.1.10)

Beide Bedingungen können nicht gleichzeitig eintreten: Angenommen es gibt gleichzeitig einen Vektor $\mathbf{y}' \in U^\perp$, der im Parallelotop $\mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]$ liegt, und einen Vektor $\mathbf{y} \in U$, der die

Ungleichung $(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]) > 0$ erfüllt. Dann muß $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') > 0$ sein, was im Widerspruch zu $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0$ steht.

Angenommen die zweite Bedingung trifft nicht zu. Wir nehmen sogar nur an, daß es zu jedem elementaren Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ ein $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]$ mit $(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = 0$ gibt. Wir zeigen nun mit Hilfe einer Induktion über $r := |\{\alpha_i : \alpha_i \notin \{0, \pm\infty\}, i = 1, \dots, d\}|$, daß dann die erste Bedingung gelten muß.

Der Fall $r = 0$ ist unser Induktionsanfang. Ohne Einschränkung können wir $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ und $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_d = \infty$ voraussetzen. Wir betrachten das Untergitter

$$L' := \{\mathbf{v} \in L : v_{k+1} = \dots = v_d = 0\}.$$

Da die verschärfte zweite Bedingung nicht zutrifft, gilt für alle elementaren Vektoren \mathbf{v} von L , die im Untergitter L' liegen, die Gleichung $(\mathbf{v}, (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^t) = 0$. Das Untergitter L' und damit auch der Untervektorraum $\langle L' \rangle_{\mathbb{R}}$ wird von den elementaren Gittervektoren von L , die in L' liegen, erzeugt. Somit ist $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^t \in \langle L' \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Weiter unten werden wir die Gleichung

$$\langle L' \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \{\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^d : \text{es gibt ein } \mathbf{y}' \in U^{\perp} \text{ mit } z'_1 = y'_1, \dots, z'_k = y'_k\} \quad (3.1)$$

beweisen. Nach dieser gibt es ein $\mathbf{y}' \in U^{\perp}$ mit $y'_1 = x_1, \dots, y'_k = x_k$. Demnach liegt \mathbf{y}' im Parallelotop $\mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]$.

Zum Beweis der Gleichung (3.1):

„ \subseteq “: Wir zeigen die „duale“ Inklusion:

$$\{\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^d : \text{es gibt ein } \mathbf{y}' \in U^{\perp} \text{ mit } z'_1 = y'_1, \dots, z'_k = y'_k\}^{\perp} \subseteq \langle L' \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Es sei ein Vektor $\mathbf{z} \in \{\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^d : \text{es gibt ein } \mathbf{y}' \in U^{\perp} \text{ mit } z'_1 = y'_1, \dots, z'_k = y'_k\}^{\perp}$ vorgegeben. Insbesondere liegt \mathbf{z} in $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Wir wählen einen Vektor $\mathbf{y} \in U^{\perp}$. Dann gilt $(\mathbf{z}, (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^t) = 0$. Wenn an der i -ten Stelle nun eine 1 steht, erhalten wir nach Voraussetzung

$$0 = (\mathbf{z}, (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t) = \lambda_i z_i \implies z_i = 0,$$

für $i = k+1, \dots, n$, d.h. $\mathbf{z} \in \langle L' \rangle_{\mathbb{R}}$.

„ \supseteq “: Es sei ein Vektor $\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^d$ gegeben, für das es einen Vektor $\mathbf{y}' \in U^{\perp}$ mit $z'_1 = y'_1, \dots, z'_k = y'_k = y'_k$ gibt. Für alle Vektoren $\mathbf{y} \in \langle L' \rangle_{\mathbb{R}}$ gilt $(\mathbf{y}, \mathbf{z}') = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i z'_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i y'_i = (\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0$.

Es sei jetzt $r > 0$. Ohne Einschränkung setzen wir $\alpha_1 \notin \{0, \pm\infty\}$ voraus. Wir zeigen im folgenden, daß eine Zahl $\alpha \in [-\alpha_1, \alpha_1]$ existiert, so daß es zu jedem elementaren Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ ein $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + (\alpha \times \prod_{i=2}^d [-\alpha_i, \alpha_i])$ mit $(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = 0$ gibt. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein $\mathbf{y}' \in \mathbf{x} + (\alpha \times \prod_{i=2}^d [-\alpha_i, \alpha_i])$, das zu allen elementaren Gittervektoren von L und damit auch zu allen Vektoren aus U senkrecht steht.

Wir definieren die Menge $C_1^- := \{\mathbf{v} \in L : \mathbf{v} \text{ elementar und } v_1 = -1\}$. Wenn für alle $\mathbf{v} \in C_1^-$ die Beziehung

$$x_1 + \lambda_1 \alpha \in (x_2 + \lambda_2 v_2 [-\alpha_2, \alpha_2]) + \dots + (x_d + \lambda_d v_d [-\alpha_d, \alpha_d])$$

gilt, dann sind wir fertig. Für jedes $\mathbf{v} \in C_1^-$ definieren wir das Intervall $I_{\mathbf{v}} := (x_2 + \lambda_2 v_2 [-\alpha_2, \alpha_2]) + \dots + (x_d + \lambda_d v_d [-\alpha_d, \alpha_d])$. Um jetzt $\bigcap_{\mathbf{v} \in C_1^-} I_{\mathbf{v}} \cap (x_1 + \lambda_1 [-\alpha_1, \alpha_1]) \neq \emptyset$ einzusehen, müssen wir (HELLYs Theorem 3.1.11) nur zeigen, daß je zwei dieser Intervalle einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, wobei wir zwischen zwei Fällen unterscheiden:

- i) Für alle $\mathbf{v} \in C_1^-$ gilt $I_{\mathbf{v}} \cap (x_1 + \lambda_1[-\alpha_1, \alpha_1]) \neq \emptyset$: Denn nach Voraussetzung gibt es zu $\mathbf{v} \in C_1^-$ ein $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + \prod_{i=1}^d [-\alpha_i, \alpha_i]$ mit $0 = (\mathbf{v}, \mathbf{z}) = -\lambda z_1 + \lambda_2 v_2 z_2 + \dots + \lambda_d v_d z_d$, d.h. $\lambda_1(x_1 + [-\alpha_1, \alpha_1]) \in I_{\mathbf{v}}$.
- ii) Es gilt $\bigcap_{\mathbf{v} \in C_1^-} I_{\mathbf{v}} \neq \emptyset$: Nach Voraussetzung gibt es zu jedem elementaren Gittervektor \mathbf{v} ein $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + ([-\infty, \infty] \times \prod_{i=2}^d [-\alpha_i, \alpha_i])$ mit $(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = 0$. Die Induktionsvoraussetzung liefert dann ein $\mathbf{y}' \in \mathbf{x} + ([-\infty, \infty] \times \prod_{i=2}^d [-\alpha_i, \alpha_i])$ in U^\perp . Speziell für $\mathbf{v} \in C_1^-$ gilt dann $0 = (\mathbf{v}, \mathbf{y}') = -\lambda_1 y'_1 + \lambda_2 v_2 y'_2 + \dots + \lambda_d v_d y'_d$. Es folgt $\lambda_1 y'_1 \in I_{\mathbf{v}}$, also $\lambda_1 y'_1 \in \bigcap_{\mathbf{v} \in C_1^-} I_{\mathbf{v}}$.

◇

Wir stehen nun unmittelbar vor der Erreichung eines Meilensteins. Wir haben alle Methoden parat, um direkt zeigen zu können, daß das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines zonotopalen Gitters durch die Projektion eines Würfels entsteht.

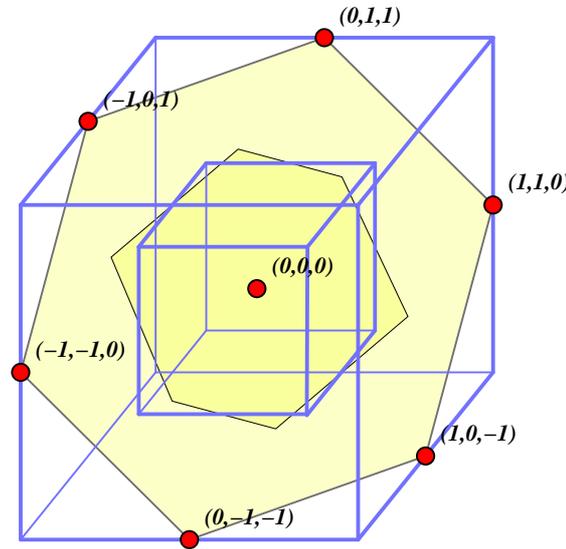


Abbildung 3.1: Das Gitter A_2 ist ein zonotopales Gitter, das ein hexagonales DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop besitzt.

Theorem 3.1.12. Das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines zonotopalen Gitters $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ist ein Zonotop (Wer hätte das gedacht?). Genauer gilt: Ist π die orthogonale Projektion von \mathbb{R}^d auf $U := \langle L \rangle_{\mathbb{R}}$, so gilt $\pi(\text{DV}(\mathbb{Z}^d)) = \pi([-1/2, 1/2]^d) = \text{DV}(L)$.

Beweis.

„ \subseteq “: Es sei $\mathbf{x} \in \text{DV}(\mathbb{Z}^d)$, d.h. für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Schreibe $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$ mit $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ und $\mathbf{y}' \in U^\perp$. Dann gilt für jeden Gittervektor $\mathbf{v} \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}', \mathbf{y}') = (\mathbf{y} + \mathbf{y}', \mathbf{y} + \mathbf{y}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

wie gewünscht.

„ \supseteq “: Es sei ein $\mathbf{x} \in \text{DV}(L)$ vorgegeben. Falls es ein $\mathbf{y}' \in (-\mathbf{x} + [-1/2, 1/2]^d) \cap U^\perp$ gibt, dann ist $\mathbf{x} + \mathbf{y}' \in \text{DV}(\mathbb{Z}^d)$ und es gilt $\pi(\mathbf{x} + \mathbf{y}') = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$. Angenommen ein solches \mathbf{y}' gibt es nicht,

dann liefert Lemma 3.1.10 einen elementaren Gittervektor $\mathbf{v} \in L$, so daß $(\mathbf{v}, -\mathbf{x} + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d) > 0$ ist. Dann gilt $(\mathbf{v}, -\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{v}) > 0$, bzw. $\frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < (\mathbf{v}, \mathbf{x})$, und wir erhalten einen Widerspruch. \diamond

Dies hat unmittelbare Konsequenzen. Durch die elementaren Vektoren eines zonotopalen Gitters ist die kombinatorische Struktur seines DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops festgelegt.

Korollar 3.1.13. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter. Dann stimmen die Covektoren von $\mathcal{M}(L)$ mit den Covektoren von $\mathcal{M}(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\pi))$ überein, wobei π die orthogonale Projektion von \mathbb{R}^d auf den von L erzeugten Untervektorraum und $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ die kanonische Basis von \mathbb{R}^d ist.

Beweis. Beide orientierten Matroide müssen aufgrund von Proposition 3.1.9 und Theorem 3.1.12 dieselben Cokreise besitzen. \diamond

Im folgenden schauen wir uns an, welche kombinatorisch-geometrische Konsequenzen die Bildung von Minoren haben. Eine Anwendung wird die explizite Bestimmung der Kantenlängen des DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops eines zonotopalen Gitters sein. Aufgrund der Rechenregeln für Kontraktionen und Deletionen, genügt es einpunktige Kontraktionen und Deletionen zu betrachten. Um vor lauter Bezeichnungen die wahren Gründe nicht zu verschleiern, sehen wir die Minoren als Untergitter des ursprünglichen Gitters an.

Proposition 3.1.14. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter mit dem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop $DV(L) = \sum_{i=1}^d [-\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i]$, wobei $\mathbf{s}_i = \pi(\mathbf{e}_i)$ und π die orthogonale Projektion von \mathbb{R}^d auf $\langle L \rangle_{\mathbb{R}}$ ist. Dann gilt

- i) $DV(L \setminus \{i\})$ ist kombinatorisch äquivalent zu $Z(S \setminus \{i\})$, wobei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$ ist.
- ii) $DV(L / \{i\})$ ist kombinatorisch äquivalent zu $Z(S / \{i\})$.

Beweis. Die kombinatorische Äquivalenz folgt aus der Existenz einer Antisomorphie zwischen dem Seitenverband des Zonotops $Z(S)$ und dem erweiterten Covektorverband des orientierten Matroids $\mathcal{M}(S)$, der Gleichheit der orientierten Matroide $\mathcal{M}(S)$ und $\mathcal{M}(L)$, sowie der Rechenregeln $\mathcal{M}(L \setminus \{i\}) = \mathcal{M}(L) \setminus \{i\}$ und $\mathcal{M}(S \setminus \{i\}) = \mathcal{M}(S) \setminus \{i\}$. \diamond

Wenn das Skalarprodukt das Standardskalarprodukt ist, dann gilt sogar $DV(L / \{i\}) = Z(S / \{i\})$, wie man leicht nachrechnet.

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter. Die Kanten von $DV(L)$ zerfallen in d Parallelitätsklassen. Jede Kante von $DV(L)$ ist ein Translat von $\pi(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, d$. Dabei ist π die orthogonale Projektion von \mathbb{R}^d auf $\langle L \rangle_{\mathbb{R}}$.

Im folgenden wird ausgiebig vom Matrizenkalkül der linearen Algebra Gebrauch gemacht. Zur Erinnerung: Es seien V und W Vektorräume endlicher Dimension über dem Körper K . Desweiteren sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, $\mathfrak{A} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V und $\mathfrak{B} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ eine Basis von W , dann bezeichnet $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) = (\mathbf{w}_i^*(f(\mathbf{v}_j))) \in K^{m \times n}$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Dabei ist $(\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*)$ die zu $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ duale Basis von W^* .

Proposition 3.1.15. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter und es sei $i \in \{1, \dots, d\}$ ein Index, der in einem Träger eines Gittervektors von L enthalten ist. Dann gilt

$$\|\pi(\mathbf{e}_i)\|^2 = \frac{\lambda_i^2 \det(L / \{i\})}{\det L}.$$

Im übrigen ist die Formel, die LOESCH zu diesem Thema ohne Beweis angibt, falsch.

Beweis. Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation $i = 1$ an.

Jede Basis von $L/\{1\}$ läßt sich zu einer Basis von L ergänzen, was wir mit Hilfe von Proposition 2.2.16 beweisen. Es seien $\mathbf{v} \in L$ und $\alpha \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\alpha\mathbf{v} \in L/\{1\}$ gegeben. Weil L ein reguläres Gitter ist, läßt sich \mathbf{v} schreiben als Summe von paarweise zueinander konformen elementaren Gittervektoren von L schreiben. Die Summanden gehören auch zu $L/\{1\}$, da $\alpha\mathbf{v} \in L/\{1\}$ ist.

Es sei $\mathfrak{A} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ eine Basis von $L/\{1\}$. Diese läßt sich durch einen Gittervektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n \in L$ zu einer Basis von L ergänzen. Durch Proposition 2.3.7 kann garantiert werden, daß $\mathbf{v}_i = 1$ ist. Außerdem wähle eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B} = (\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_d)$ von $\langle L \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det L &= \det \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id})^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}) \right) \\ &= \prod_{i=1}^d \lambda_i \det(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}))^2 \end{aligned}$$

und ($\mathbf{w} := \|\frac{1}{\pi(\mathbf{e}_1)}\|\pi(\mathbf{e}_1)$)

$$\begin{aligned} \det(L/\{1\}) &= \det \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id})^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}) \right) \\ &= \prod_{i=1}^d \lambda_i \det(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}))^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\det(L/\{1\})}{\det L} &= \left(\frac{\det(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}))}{\det(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}))} \right)^2 \\ &= \det \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}) (M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}))^{-1} \right)^2 \\ &= \det \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}(\text{id}) M_{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}^{\mathfrak{E}}(\text{id}) \right)^2 \\ &= \det \left(M_{(\mathbf{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})}^{(\mathbf{w}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})} \right)^2 \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

dabei ist α noch zu bestimmen. Da $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)$ eine Basis von \mathbb{R}^d ist, gibt es eindeutig Koeffizienten $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_d$ mit $\|\frac{1}{\pi(\mathbf{e}_1)}\|\pi(\mathbf{e}_1) = \alpha\mathbf{v} + \sum_{i=2}^d \alpha_i \mathbf{v}_i$. Da $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_d \in \mathbb{R}(\pi(\mathbf{e}_1))^{\perp}$, sind die Koeffizienten $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_d$ allesamt gleich Null. Weil der erste Koeffizient von \mathbf{v} gleich Eins ist, ist der erste Koeffizient von $\|\frac{1}{\pi(\mathbf{e}_1)}\|\pi(\mathbf{e}_1)$ gleich α . Mit Hilfe der Gleichung $0 = (\pi(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 - \pi(\mathbf{e}_1)) = \lambda_1 \pi(\mathbf{e}_1)_1 - \|\pi(\mathbf{e}_1)\|^2$ folgt letztendlich das Gewünschte. \diamond

GERRITZEN hat in [Ger82] eine Formel für die Determinante eines zonotopalen Gitters hergeleitet, an der sehr schön sichtbar wird, in welcher Weise die Kombinatorik und die Geometrie eines zonotopalen Gitters eingehen.

Theorem 3.1.16. (siehe [Ger82])

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter. Mit \mathcal{B}^* wird die Menge der Cobasen von $\mathcal{M}(L)$ bezeichnet und mit \mathcal{B} die Menge $\{\{1, \dots, d\} \setminus B^* : B^* \in \mathcal{B}^*\}$. Die Determinante von L beträgt $\det L = \sum_{B \in \mathcal{B}} \prod_{b \in B} \lambda_b$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension d .

$d = 1$: Dann ist das Gitter L entweder gleich \mathbb{Z} oder gleich $\{0\}$. Im ersten Fall ist $L^* = \{0\}$ und $\mathcal{B} = \{1\}$, so daß $\det L = \lambda_1 = \sum_{B \in \{1\}} \prod_{b \in B} \lambda_b$ gilt. Im zweiten Fall ist $L^* = \mathbb{Z}^d$ und $B = \emptyset$, so daß $\det L = 0 = \sum_{B \in \emptyset} \prod_{b \in B} \lambda_b$ gilt.

$d > 1$:

1. Fall: Es gibt einen Index $i \in \{1, \dots, d\}$, so daß $i \in B'$ für alle Cobasen $B' \in \mathcal{B}^*$ gilt.

Dann ist $L/\{i\} = L$, denn wenn es einen Cokreis $X \in \mathcal{C}^*$ mit $i \in \underline{X}$ gibt, dann ist $\underline{X} \setminus \{i\}$ in einer Cobasis $B' \in \mathcal{B}^*$ enthalten, die den Index i wiederum nicht enthält. Die Induktionsvoraussetzung liefert jetzt unmittelbar die Behauptung des Theorems.

2. Fall: Für jeden Index $i \in \{1, \dots, d\}$ gibt es eine Cobasis $B'_i \in \mathcal{B}^*$ mit $i \notin B'_i$.

Wir betrachten die Determinante von L als Polynom in den Unbestimmten $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Wir zeigen, daß die Summanden der Determinante von L eineindeutig den Cobasen von $\mathcal{M}(L)$ entsprechen.

Es sei B' eine Cobasis von $\mathcal{M}(L)$. Dann ist $\sum_{b \in B} \lambda_b$, $B := \{1, \dots, d\} \setminus B'$, ein Summand von $\det L$. Denn:

Wir nehmen ohne Einschränkung $1 \notin B'$ an. Es sei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ die zu B' gehörige Basis, wobei $1 \in \underline{\mathbf{v}}_1$ (siehe Proposition 2.3.7). Dann ist $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ eine Basis von $L/\{1\}$. Die Determinante von L ist $\det L = ((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j))_{1 \leq i, j \leq d}$. Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir $\det L = \lambda_1 \det(L/\{1\}) + p$, $p \in \mathbb{R}[\lambda_2, \dots, \lambda_d]$. Da B' eine Cobasis von $\mathcal{M}(L/\{1\})$ ist, besitzt $\det(L/\{1\})$ genau einen Summand der Form $\prod_{b \in B \setminus \{1\}} \lambda_b$ und die Behauptung folgt.

Ganz analog folgt, daß $B' = \{1, \dots, d\} \setminus B$ eine Cobasis von $\mathcal{M}(L)$ ist, falls $\prod_{b \in B} \lambda_b$ ein Summand von $\det L$ ist. \diamond

Korollar 3.1.17. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ein zonotopales Gitter und es sei $i \in \{1, \dots, d\}$ ein Index, der in einem Träger eines Gittervektors von L enthalten ist. Dann gilt

$$\det L = \lambda_i \det(L/\{i\}) + \det(L \setminus \{i\}).$$

3.2 Kombinatorische Klassifikation von zonotopalen Gittern

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir eingesehen, daß die kombinatorischen Eigenschaften eines zonotopalen Gitters nur vom unterliegenden regulären Gitter abhängen. In diesem Abschnitt lernen wir *das* Werkzeug für die Klassifikation von regulären Gittern kennen.

Es ist SEYMOURS Zerlegungstheorem für reguläre orientierte Matroide, das besagt, daß sich jedes reguläre orientierte Matroid als „Summe“ von graphischen, cographischen orientierten Matroiden und dem exzeptionellen regulären orientierten Matroid R_{10} darstellen läßt. Der Beweis des Zerlegungstheorems ist sehr anspruchsvoll und wird hier nicht gegeben.

Vielmehr konzentrieren wir uns auf die Übersetzung der Aussage in die Sprache der regulären Gitter. So definieren wir die obengenannte „Summe“, die aus dem Verkleben von Untergittern des \mathbb{Z}^n entlang von Koordinaten entsteht, für reguläre Gitter. Danach wenden wir uns den Grundbausteinen zu und sagen, was graphische, cographische Gitter und das Gitter R_{10} sind. Im Anschluß verbleibt das Zerlegungstheorem zu zitieren.

Die wirkliche Klassifikation haben ERDAHL und RYSHKOV in [ER94] bis zur Dimension 5 vorangetrieben. Daraufhin haben DANILOV und GRISHUKIN in [DG99] mit Hilfe des Zerlegungstheorems zusätzlich Dimension 6 geschafft.

Zur Formulierung des Zerlegungstheorems benötigen wir die sogenannten 1-, 2-, 3-Summen. Diese werden u.a. bei OXLEY [Ox192] in den Abschnitten 7.1 und 12.4 ausführlich erklärt.

Die 1-Summe ist die bekannte direkte Summe von Gittern, auf die wir nur kurz eingehen.

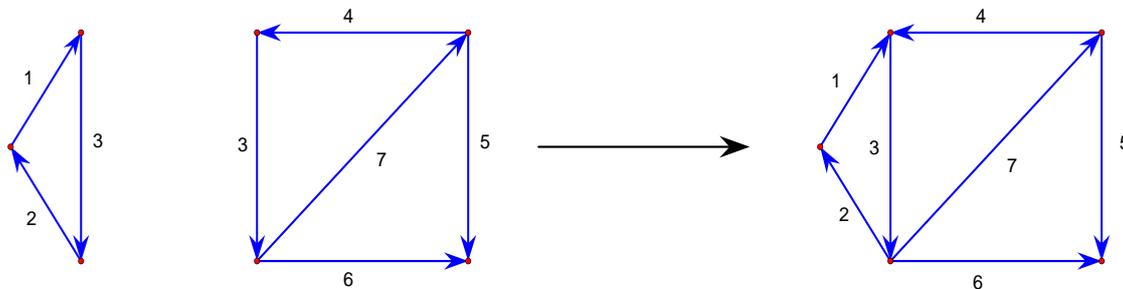
Definition 3.2.1. Die 1-Summe der Gitter $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ ist als das Untergitter $L_1 \oplus_1 L_2 := \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{Z}^{n_1+n_2} : \mathbf{v}_1 \in L_1 \text{ und } \mathbf{v}_2 \in L_2\}$ des $\mathbb{Z}^{n_1+n_2}$ definiert.

Falls L_1 und L_2 reguläre Gitter sind, dann ist natürlich $L_1 \oplus_1 L_2$ ebenfalls regulär. Die Menge der elementaren Gittervektoren der 1-Summe $L_1 \oplus_1 L_2$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(L_1 \oplus_1 L_2) = & \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) : \mathbf{v}_1 \text{ ist elementarer Gittervektor von } L_1\} \\ & \cup \{(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 \text{ ist elementarer Gittervektor von } L_2\}. \end{aligned}$$

Zur Definition der 2- und 3-Summe müssen zwei Gitter entlang von Koordinaten verschmolzen werden. Diese Konstruktion wird durch die Parallelschaltung von gerichteten Graphen motiviert, mit der wir uns erstmal anhand eines Beispiels vertraut machen.

Beispiel 3.2.2. Wir betrachten die Kreise der Graphen G_1 , G_2 sowie des Graphs G_3 , der durch Verschmelzung von G_1 und G_2 an der Kante, die mit 3 beschriftet ist.



Von links nach rechts: Die Graphen G_1, G_2, G_3 .

1	2	3
+	+	+
-	-	-

3	4	5	6	7
+	+	-	+	0
-	-	+	-	0
+	+	0	0	+
-	-	0	0	-
0	0	+	-	+
0	0	-	+	-

1	2	3	4	5	6	7
+	+	+	0	0	0	0
-	-	-	0	0	0	0
0	0	+	+	-	+	0
0	0	-	-	+	-	0
0	0	+	+	0	0	+
0	0	-	-	0	0	-
0	0	0	0	+	-	+
0	0	0	0	-	+	-
+	+	0	-	+	-	0
-	-	0	+	-	+	0
+	+	0	-	0	0	-
-	-	0	+	0	0	+

Dieses Verschmelzen entlang einer Kante läßt sich natürlich unmittelbar zum Verschmelzen entlang von gleichen Teilgraphen verallgemeinern. Dies sparen wir uns, und definieren Verschmelzen gleich für zwei Untergitter des Standardgitters \mathbb{Z}^n entlang von Koordinaten. Das erfordert vor allem schreibtechnischen Aufwand.

Es seien zwei Untergitter $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ gegeben. Desweiteren seien A eine endliche Menge und $\varphi_i : A \rightarrow \{1, \dots, n_i\}$, $i = 1, 2$, injektive Abbildungen. Setze

$$W := \langle \{(\mathbf{e}_{\varphi_1(a)}, -\mathbf{e}_{\varphi_2(a)}) : a \in A\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Dies ist ein Untergitter von $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$. Mit $\pi : \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2} \rightarrow (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2})/W$ bezeichne die kanonische Projektion. Es ist $(\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2})/W$ isomorph zu $\mathbb{Z}^{n_1+n_2-|A|}$, und einen expliziten Isomorphismus bekommt mit Hilfe von

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{\{1, \dots, n_2\} \setminus \varphi_2(A)} & \rightarrow (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2})/W \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{w}') + W, \end{cases}$$

wobei $\mathbf{w}'_i = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n_2\} \setminus \varphi_2(A)$ und $\mathbf{w}'_i = 0$ für alle $i \in \varphi_2(A)$ ist. Wir fassen — zugegebenermaßen etwas schlampig — den Isomorphismus Φ ebenfalls als Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}^{n_1+n_2-|A|}$ und $(\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2})/W$ auf.

Definition 3.2.3. Es seien $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ zwei Gitter und die obige Situation gegeben. Dann ist die *Verschmelzung* von L_1 und L_2 entlang von A definiert als $L_1 \oplus_A L_2 := \Phi^{-1}(\pi(L_1, L_2)) \subseteq \mathbb{Z}^{n_1+n_2-|A|}$.

Wie man sich leicht überlegt, ist die Verschmelzung von zwei regulären Gittern im Allgemeinen nicht erneut ein reguläres Gitter. Für $\mathbf{v} \in L_1$, $\mathbf{w} \in L_2$ gilt nämlich

$$\Phi^{-1}(\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \Phi^{-1}((\mathbf{v}, \mathbf{w}) + W) = \left(\mathbf{v} - \sum_{a \in A} w_{\varphi_2(a)} \mathbf{e}_{\varphi_1(a)}, \sum_{i \in \{1, \dots, n_2\} \setminus \varphi_2(A)} w_i \mathbf{e}_i \right).$$

Ein hinreichendes Kriterium dafür, daß die Verschmelzung von zwei regulären Gittern erneut ein reguläres Gitter ist, hat BRYLAWSKI in [Bry75] angegeben.

Definition 3.2.4. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein reguläres Gitter. Eine Teilmenge $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ heißt *modularer Teilraum* von L , falls es für jeden elementaren Gittervektor $\mathbf{v} \in L$ mit $\mathbf{v} \setminus X \neq \emptyset$ einen Index $x \in X$ und einen elementaren Gittervektor $\mathbf{w} \in L$ mit $\mathbf{w} \subseteq (\mathbf{v} \setminus X) \cup \{x\}$ gibt.

Proposition 3.2.5. Es seien $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ reguläre Gitter. Außerdem seien $X_i \subseteq \{1, \dots, n_i\}$, modulare Teilräume von L_i , $i = 1, 2$ mit $|X_1| = |X_2|$. Dann ist $L_1 \oplus_X L_2$ ebenfalls regulär, wobei $X = \{1, \dots, |X_1|\}$ und $\varphi_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, irgendwelche injektive Abbildungen sind.

Beweis. Siehe [Bry75]. ◇

Falls jetzt in Proposition 3.2.5 $|X| = 1$ ist, dann ist $L_1 \oplus_X L_2$ auf jeden Fall ein reguläres Gitter. Diesen Fall haben wir schon im Beispiel 3.2.2 für gerichtete Graphen kennengelernt und wir greifen ihn erneut auf.

Beispiel 3.2.6. Es seien $L_1 = \mathbb{Z}(1, 1, 1)^t \subseteq \mathbb{Z}^3$ und $L_2 = \mathbb{Z}(1, 1, -1, 1, 0)^t + \mathbb{Z}(0, 0, -1, 1, -1)^t \subseteq \mathbb{Z}^5$. Dann ist

$$\begin{aligned} (L_1 \oplus L_2)/\mathbb{Z}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) &= \mathbb{Z}((1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t + \mathbb{Z}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)) \\ &+ \mathbb{Z}((0, 0, 0, 1, 1, -1, 1, 0)^t + \mathbb{Z}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)) \\ &+ \mathbb{Z}((0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1)^t + \mathbb{Z}(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)). \end{aligned}$$

D.h. wenn wir die Gitter L_1 und L_2 an den Koordinaten 3 und 4 verschmelzen möchten, erhalten wir das Gitter $L_1 \oplus_X L_2 = \mathbb{Z}(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t + \mathbb{Z}(0, 0, 1, 1, -1, 1, 0)^t + \mathbb{Z}(0, 0, 0, 0, -1, 1, -1)^t$, wobei die Menge X und die Abbildungen φ_i noch entsprechend gewählt werden müssen.

Falls $X = \{x\}$ ist, lassen sich die elementaren Gittervektoren von $L_1 \oplus_X L_2$ unmittelbar aus den elementaren Gittervektoren von L_1 und L_2 berechnen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(L_1 \oplus_X L_2) &= \{\Phi^{-1}(\pi(\mathbf{v}, \mathbf{0})) : \mathbf{v} \in L_1 \text{ elementar und } \varphi_1(x) \cap \underline{\mathbf{v}} = \emptyset\} \\ &\cup \{\Phi^{-1}(\pi(\mathbf{0}, \mathbf{w})) : \mathbf{w} \in L_2 \text{ elementar und } \varphi_2(x) \cap \underline{\mathbf{w}} = \emptyset\} \\ &\cup \{\Phi^{-1}(\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) : \mathbf{v} \in L_1 \text{ elementar, } \mathbf{w} \in L_2 \text{ elementar, } v_{\varphi_1(x)} = -w_{\varphi_2(x)}\}. \end{aligned}$$

Endlich können wir 2- und 3-Summen von zwei regulären Gittern definieren. Bei einer 2-Summe werden zwei Gitter entlang einer Koordinate verschmolzen, die anschließend durch die Operation Deletion gelöscht wird. In der graphentheoretischen Interpretation entspricht dies dem Zusammenkleben von zwei Graphen entlang einer Kante mit anschließendem Löschen dieser Kante.

Definition 3.2.7. Es seien $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ reguläre Gitter, $n_1, n_2 \geq 3$. Es seien $x_i \in \{1, \dots, n_i\}$, $X = \{x\}$ und $\varphi_i(x) = x_i$, $i = 1, 2$, gegeben. Wir definieren dann die 2-Summe von L_1 und L_2 als $L_1 \oplus_2 L_2 := (L_1 \oplus_X L_2) \setminus \{x_1\}$.

Die 2-Summe von zwei regulären Gitter ist natürlich von verschiedenen Auswahlen abhängig. Durch Proposition 3.1.7 und Proposition 3.2.5 ist klar, daß eine 2-Summe von zwei regulären Gittern wieder regulär ist.

Bei einer 3-Summe werden zwei Gitter entlang eines gemeinsamen elementaren Vektors, dessen Träger die Kardinalität 3 besitzt, verschmolzen.

Definition 3.2.8. Es seien $L_1 \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$ und $L_2 \subseteq \mathbb{Z}^{n_2}$ reguläre Gitter, $n_1, n_2 \geq 6$. Es seien $X_i \subseteq \{1, \dots, n_i\}$ Teilmengen der Kardinalität 3, so daß es elementare Gittervektoren $\mathbf{v}_i \in L_i$ mit $\underline{\mathbf{v}}_i = X_i$, $i = 1, 2$, gibt. Außerdem seien X eine Menge der Kardinalität 3 und $\varphi_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, injektive Abbildungen. Wir definieren dann die 3-Summe von L_1 und L_2 als $(L_1 \oplus_X L_2) \setminus X_1$.

Genauso wie die 2-Summe ist die 3-Summe von zwei regulären Gitter von verschiedenen Auswahlen abhängig. Durch Proposition 3.1.7 und Proposition 3.2.5 ist wieder einsichtig, daß die 3-Summe von zwei regulären Gittern regulär ist.

Die Grundbausteine von regulären orientierten Matroide sind die graphischen und cographischen orientierten Matroide. Es war die Motivation von TUTTE, eine Klasse von orientierten Matroiden zu finden, die möglichst klein ist, die Klassen der graphischen unter der cographischen orientierten Matroide umfaßt und zusätzlich unter Dualisierung abgeschlossen ist, zu finden, die ihn zur Definition von regulären Kettengruppen führte.

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Diesem Graph ordnen wir ein Gitter $L_G \subseteq \mathbb{Z}^n$, $n = |E|$ zu: Wir beschriften die Kanten des Graphs mit der Zahlen $1, \dots, n$, interpretieren die gerichtete Kreise von G als Vektoren der Menge $\{-1, 0, +1\}^n$ und nehmen dessen \mathbb{Z} -Erzeugnis, d.h. $L_G := \sum_{v \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{Z}^n$. In [Tut71] 1.31 und 1.32 wird nachgewiesen, daß ein solches Gitter regulär ist. Ein reguläres Gitter, was auf diese Weise entsteht, heißt *graphisches* Gitter. Es gilt $\mathcal{M}^*(L_G) = \mathcal{M}(G)$. Durch die duale Konstruktion bekommen wir die *cographischen* Gitter, so daß wir $\mathcal{M}^*((L_G)^*) = \mathcal{M}^*(G)$ erhalten. Es ist dann $(L_G)^* = L_G^* = \sum_{v \in \mathcal{C}^*(G)} \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{Z}^n$. In [Tut71] 2.71 und 2.72 werden die Dimensionen von L_G und L_G^* berechnet: Es ist $\dim L_G = |E| - |V| + \omega(G)$ und $\dim L_G^* = |V| - \omega(G)$, wobei $\omega(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G ist.

Die Orientierung von G ist zwar für die Definition notwendig, aber eigentlich ist sie egal, da Gitter, die von zwei gleichen ungerichteten Graphen herkommen, die unterschiedlich gerichtet sind, bei jedem Skalarprodukt der Form $(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ isometrisch sind.

Die (einfachen) cographischen Gitter sind alte Bekannte. Sie entsprechen den Gittern von erster Art. An einem gerichteten DELONE-Graph eines Gitters von erster läßt sich der Seitenverband des DIRICHLET-VORONOÏ-Polytops unmittelbar ablesen. Genauer gilt die

Proposition 3.2.9. Es seien $L \subseteq E$ ein Gitter von erster Art und $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ eine stumpfe affine Basis von L . Definiere den gerichteten DELONE-Graph

$$G = (V = \{0, \dots, d\}, E = \{(i, j) \subseteq V \times V : (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \neq 0, 0 \leq i < j \leq d\}).$$

Dann ist das cographische Gitter $L_G^* \subseteq \mathbb{Z}^E$, das in dem euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^E , der das Skalarprodukt $(e_{(i,j)}, e_{(k,l)}) = -\delta_{(i,j),(k,l)} (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$ besitzt, liegt, isometrisch zu L . Das orientierte Matroid $\mathcal{M}(L_G^*)$ ist einfach, da der gerichtete Graph weder Schlingen noch Doppelkanten enthält.

Es sei umgekehrt $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph ohne Schlingen und Doppelkanten. Dann ist das zonotopale Gitter L_G^* von erster Art.

Beweis. Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} L & \rightarrow L_G^* \\ \mathbf{b}_i & \mapsto (x_{(0,1)}, \dots, x_{(d-1,d)}), \end{cases} \quad \text{wobei } x_{(k,l)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \text{ und } (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) \neq 0, \\ -1, & \text{falls } i = l \text{ und } (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist wohldefiniert und eine Isometrie, wie man ohne Mühe überprüft.

Für einen Knoten $v \in V$ definiere den Vektor $\mathbf{b}(v)$ komponentenweise für $e \in E$ durch

$$\mathbf{b}(v)_e := \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Knoten } w \in V \text{ mit } e = (v, w) \text{ gibt,} \\ -1, & \text{falls es einen Knoten } w \in V \text{ mit } e = (w, v) \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man macht sich leicht klar, daß diese Vektoren eine stumpfe affine Basis von L_G^* bilden. \diamond

Die Klasse der regulären Gitter ist eine echte Oberklasse der graphischen, bzw. der cographischen Gitter. Außerdem sind die Klassen der graphischen und der cographischen Gitter echt verschieden. Das dimensionskleinste graphische Gitter, das nicht cographisch ist, ist das vierdimensionale

Gitter $L_{K_{3,3}}$, dabei ist $K_{3,3}$ der bipartite Graph mit 6 Knoten. D.h. es gibt Gitter, die nicht von erster Art sind, aber dennoch ein Zonotop als DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop besitzen. Wie die verschiedenen Gitterklassen zusammenhängen wird durch ein Theorem von TUTTE klar.

Theorem 3.2.10. (KURATOWSKIS Theorem für reguläre Gitter von TUTTE)

Ein reguläres Gitter ist genau dann graphisch, wenn es keine Minoren, die zu den cographischen Gittern $L_{K_5}^*$ und $L_{K_{3,3}}^*$ isomorph sind, besitzt. Umgekehrt ist ein reguläres Gitter genau dann cographisch, wenn es keine Minoren, die zu den graphischen Gittern L_{K_5} und $L_{K_{3,3}}$ isomorph sind, besitzt.

Beweis. Siehe [Tut58] und [Tut59]. ◇

Das 5-dimensionale Gitter $R_{10} \subseteq \mathbb{Z}^{10}$, das das kleinste reguläre Gitter ist, das weder graphisch noch cographisch ist, wird von den Zeilen der folgenden (5×10) -Matrix erzeugt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.2.11. (Zerlegungssatz von SEYMOUR für reguläre Gitter)

Ein reguläres Gitter läßt sich als 1-Summen, 2-Summen und 3-Summen von graphischen, cographischen Gittern und zu R_{10} isomorphen Gittern schreiben.

Beweis. Siehe [Sey80]. ◇

Wie eine solche Zerlegung tatsächlich berechnet wird, ist im Buch von TRÜMPER [Trü92] nachzulesen. Er gibt dort sogar effiziente Algorithmen zur Berechnung einer Zerlegung eines regulären orientierten Matroids und zum Test eines orientierten Matroids auf Regularität an.

3.3 Zonotopale Gitter in der L -Zerlegung von VORONOÏ

Die zonotopalen Gitter lassen sich in der L -Zerlegung von VORONOÏ wiederfinden. Die zugehörigen positiv-definiten quadratischen Formen bilden Kegel der L -Zerlegung. Bis zur Dimension 3 gibt es bis auf Äquivalenz nur einen volldimensionalen Kegel, nämlich den Hauptkegel von VORONOÏ. Ab Dimension 4 gibt es immer mehr Äquivalenzklassen von volldimensionalen Kegeln, wobei aber nur der Hauptkegel von VORONOÏ zu den zonotopalen Gittern gehört.

Definition 3.3.1. Es sei $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein reguläres Gitter. Der Kegel der positiv-semidefiniten Matrizen

$$\sigma_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)} := \{G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

heißt *zonotopaler Kegel*, wobei

$$G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \left(\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_{ik} b_{jk} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

definiert ist. Jeder Kegel, der auf diese Weise entsteht, heißt *zonotopal*.

Daß ein zonotopaler Kegel in der Tat ein polyedrischer Kegel ist, ist klar. Die Dimension des Kegels beträgt n , falls das orientierte Matroid $\mathcal{M}(L)$ einfach ist. Allgemein beträgt die Dimension des Kegels durch die Kardinalität der Indexmenge, auf der das einfache orientierte Matroid $\tilde{M}(L)$ (siehe Abschnitt 2.3.6) lebt, bestimmt. Jede Kante des Kegels ist ein Strahl von Rang-1-Matrizen.

Proposition 3.3.2. Die Seiten eines zonotopalen Kegels sind wiederum zonotopale Kegel, sie entstehen durch Deletion des ursprünglichen regulären Gitters.

Beweis. Um die Aussage zu überprüfen, genügt es, sich die Facetten eines zonotopalen Kegels anzuschauen. Es seien $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein reguläres Gitter und

$$\sigma_i = \{G_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda_i = 0\}$$

eine Facette des zonotopalen Kegels $\sigma_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}$. Dann ist σ ebenfalls ein zonotopaler Kegel, wobei das zugehörige reguläre Gitter die Deletion $L \setminus \{i\} = \mathbb{Z}\mathbf{b}'_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{b}'_d \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{b}'_j|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} = \mathbf{b}'_j$, $j = 1, \dots, n$. \diamond

Theorem 3.3.3. Es sei $L = \mathbb{Z}\mathbf{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{b}_d \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein reguläres Gitter. Dann ist der zonotopale Kegel $\sigma_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}$ ein Kegel der L -Zerlegung von VORONOÏ.

Beweis. Daß die der zonotopale Kegel $\sigma_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}$ ein Teilkegel eines Kegels σ der L -Zerlegung von VORONOÏ ist, folgt mit Hilfe von Korollar 3.1.13.

Angenommen der zonotopale Kegel ist ein echter Teilkegel des Kegels σ . Da beide Kegel konvex sind, muß eine Facette F von $\sigma_{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d)}$ im Kegel σ enthalten sein. Die Facette F wird von positiv-definiten quadratischen Formen gebildet, die zu einer Deletion von L gehören. Das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop einer Deletion von L hat jedoch nicht die gleiche kombinatorische Struktur wie das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L . Also können auch die DELONE-Zerlegungen nicht übereinstimmen. \diamond

Korollar 3.3.4. Der Hauptkegel von VORONOÏ ist der einzige volldimensionale zonotopale Kegel.

Beweis. Dies folgt aus den Überlegungen in Beispiel 2.2.19, in Abschnitt 2.3.6, der Proposition 2.3.17, der Proposition 3.2.9 und natürlich aus denen dieses Abschnitts. \diamond

LOESCH, ERDAHL und RYSHKOV haben herausgefunden, daß die zonotopalen Kegel anhand ihrer Kanten charakterisiert werden können. Dies zusammen mit dem vorhergehenden Theorem liefern einen neuen Beweis und eine Verschärfung des Theorems 2.2.21 von DICKSON.

Theorem 3.3.5. Ein polyedrischer Kegel der L -Zerlegung von VORONOÏ ist genau dann ein zonotopaler Kegel, falls jede seiner Kanten aus einem Strahl von Rang-1-Matrizen besteht.

Beweis. Siehe [Loe90] B 3.3 oder [ER94] Theorem 4.3. ◇

Kapitel 4

Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ

Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ besagt, daß jedes Polytop, mit dessen Translaten der umliegende Raum gepflastert werden kann, affin äquivalent zum DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines Gitters ist. Sie ist seit gut einem Jahrhundert weder bewiesen noch widerlegt.

Allerdings wurden seitdem viele Teilresultate erzielt, die die Vermutung zumindest plausibel machen. Die wichtigsten Resultate und Verallgemeinerungen, die im Umfeld der Vermutung entstanden sind, werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels resümiert.

Im zweiten Abschnitt wird die Vermutung für die Klasse der Zonotope nachgewiesen. Das ist kein neues Resultat, es wurde schon von ERDAHL in [Erd99] gezeigt. Im Gegensatz zu ERDAHLS Beweis, gebrauchen wir konsequent die Theorie der regulären orientierten Matroide, um die Vermutung zu beweisen. Auch LOESCH überprüfte die Vermutung für sogenannte reguläre Zonotope erfolgreich. In einem regulären Zonotop steht jeder Facettenmittelpunktvektor senkrecht zur zugehörigen Facette.

VENKOV und COXETER erkannten, daß die raumpflasternden Zonotope schon anhand ihrer kombinatorischen Struktur charakterisiert werden können. MCMULLEN schmückte dieses Resultat weiter aus. In [McM75] konstruiert er zu einem gegebenen raumpflasternden Zonotop Z ein reguläres Gitter L mit einem zu Z kombinatorisch äquivalenten DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop. Durch eine geeignete Wahl eines Skalarprodukts, die auf dem Theorem 2.3.16 über projektive Äquivalenz beruht, wird L zu einem zonotopalen Gitter. Anschließend finden wir mit Hilfe einer Matrizenrechnung eine Affinität, die das Zonotop Z auf das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L abbildet.

4.1 Ein Überblick über bekannte Resultate

Es seien E ein euklidischer Vektorraum der endlichen Dimension d und $K \subseteq E$ ein d -dimensionaler konvexer Körper, der mit Translaten den Raum pflastert. D.h. es gibt eine Menge $T \subseteq E$ von Translationsvektoren derart, daß $E = \bigcup_{t \in T} (K + t)$ und für $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, gilt $(K + t_1)^0 \cap (K + t_2)^0 = \emptyset$ gilt. Falls die Menge T ein Gitter ist, spricht man von einer *Gitterpflasterung*.

Schon MINKOWSKI hat in [Min97] beschrieben, daß K nur ein zentralsymmetrisches Polytop mit zentralsymmetrischen Facetten sein kann. Die Facettenzahl beträgt dabei höchstens $2(2^d - 1)$, falls K eine Gitterpflasterung erlaubt. Man kann die konvexen Körper, die mit Translaten den Raum pflastern auch vollständig charakterisieren. Dazu muß noch der Begriff des Gürtels eines Polytops eingeführt werden.

Definition 4.1.1. Es sei $P \subseteq E$ ein d -dimensionales Polytop. Ein *Gürtel* von P ist eine maximale Teilmenge seiner Facetten, mit der Eigenschaft, daß all diese Facetten Translate einer $(d - 2)$ -dimensionalen Seite von P enthalten.

VENKOV und MCMULLEN haben unabhängig voneinander das nachfolgende Theorem bewiesen.

Theorem 4.1.2. (siehe [McM80] und [Ven54])

Ein konvexer Körper $K \subseteq E$ pflastert genau dann den Raum mit Translaten, falls K ein zentralsymmetrisches Polytop mit zentralsymmetrischen Facetten ist, dessen Gürtel jeweils entweder vier oder sechs Facetten enthalten. Überdies ermöglicht K eine Gitterpflasterung, die einen polytopalen Komplex bildet.

Aus diesem Theorem folgt, daß ein konvexer Körper, der den Raum durch Translate pflastert, ein Paralleloeder ist. An diesen Begriff wollen wir noch einmal erinnern. Außerdem weisen wir auf den affinen Charakter der Gesamtsituation hin.

Definition 4.1.3. Es sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Ein Polytop $P \subseteq V$ heißt *Paralleloeder*, wenn es eine Menge $L \subseteq V$ gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Die Translate von P unter L überdecken den gesamten Raum, d.h. es gilt $\bigcup_{v \in L} (P + v) = V$.
- ii) Für alle $v, w \in L$ ist $(P + v) \cap (P + w)$ eine gemeinsame Seite von $P + v$ und $P + w$.

Wenn man die Menge der d -dimensionalen Paralleloeder in Klassen bzgl. affiner Äquivalenz einteilt, dann stellt sich natürlich die Frage nach einem vollständigen Repräsentantensystem.

Vermutung 4.1.4. (*Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ*)

Es sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Es sei $P \subseteq V$ ein Paralleloeder. Dann gibt es auf V ein Skalarprodukt und ein Gitter $L \subseteq V$, so daß das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L bzgl. dieses Skalarproduktes ein Translat von P ist.

Für bestimmte Klassen von Paralleloedern wurde die Vermutung schon erfolgreich überprüft.

VORONOÏ selbst erledigt in [Vor09] den Fall der primitiven Paralleloeder. Primitive Paralleloeder führen zu genau den Pflasterungen, in denen jede Ecke eines Paralleloeders in exakt $d + 1$ Paralleloedern liegt.

In [Zhi29] beweist ZHITOMIRSKII die Vermutung für Paralleloeder, deren Gürtel nur aus Sechsecken bestehen. Darauf aufbauend zeigen MICHEL, RYSHKOV und SENECHAL in [MRS95], daß die affine Abbildung, die ein Paralleloeder zu einem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines Gitters macht, sogar bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

Die Einsicht, daß die Vermutung in Dimension 4 richtig ist, haben wir DELONE zu verdanken. ENGEL konnte in [Eng98] immerhin zeigen, daß in Dimension 5 jedes Paralleloeder zumindest kombinatorisch äquivalent zu dem DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines Gitters ist.

ERDAHL weist in [Erd99] die Richtigkeit der Vermutung für die Klasse der raumpflasternden Zonotope nach.

4.2 Beweis der Vermutung für Zonotope

Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix vom Rang d , in der je zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Mit dem Zonotop $Z(S) = [-\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1] + \dots + [-\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n]$ lasse sich der Raum \mathbb{R}^d durch Translate pflastern, d.h. $Z(S)$ ist ein Paralleloeder.

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß das Zonotop $Z(S)$ affin äquivalent zum DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop eines d -dimensionalen Gitters ist. Das Gitter ist in natürlicher Weise Teilmenge von \mathbb{R}^n . Die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ ist für Zonotope, die den umliegenden Raum pflastern, also richtig.

Wie schon mehrmals gesagt, wurde das gleiche Ergebnis von ERDAHL erreicht. Neben ERDAHL haben sich eine Reihe von anderen Mathematikern mit raumpflasternden Zonotopen beschäftigt und gewissermaßen Vorarbeit für ERDAHL und natürlich auch für diese Diplomarbeit geleistet. Hier sind in erster Linie VENKOV, COXETER, SHEPHARD, MCMULLEN und JAEGER zu nennen.

Eine wichtige Tatsache für den Beweis von Theorem 4.2.3 ist, daß d linear unabhängige Spaltenvektoren der Matrix S eindeutig d Facetten des Zonotops $Z(S)$ zugeordnet werden können.

Lemma 4.2.1. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix vom Rang d . Die ersten d Spaltenvektoren von S seien linear unabhängig. Zu dem Index $j \in \{1, \dots, d\}$ gibt es eine Facette F_j von $Z(S)$, die in einer zu $H_j := \mathbb{R}\mathbf{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_d$ parallelen affinen Hyperebene liegt. Der Mittelpunktvektor von F_j ist

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{s}_j + \sum_{i=d+1}^n X_{ji} \mathbf{s}_i, \quad X_{ji} \in \{-, 0, +\},$$

wobei $|X_{ji}| = 1$ genau dann gilt, falls $\mathbf{s}_i \notin H_j$ ist, $i = d+1, \dots, n$.

Beweis. Anwendung von Lemma 2.1.4 mit der Linearform $f \in (\mathbb{R}^d)^*$, die durch

$$f(\mathbf{s}_1) = \dots = f(\mathbf{s}_{j-1}) = f(\mathbf{s}_{j+1}) = \dots = f(\mathbf{s}_d) = 0, \quad f(\mathbf{s}_j) = 1$$

eindeutig bestimmt wird, liefert unmittelbar die Behauptung. \diamond

Lemma 4.2.2. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix vom Rang d . Die Summe der Untervektorräume $U := \mathbb{R}\mathbf{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_i$ und $W := \mathbb{R}\mathbf{s}_{i+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_n$ erzeuge den kompletten \mathbb{R}^d . Mit π bezeichnen wir die Projektion von \mathbb{R}^d auf U längs W . Falls das Zonotop $Z(S)$ den Raum \mathbb{R}^d pflastert, dann pflastert auch das Zonotop $\pi(Z(S))$ den Raum U .

Beweis. Siehe [She74]. Es sollte noch angemerkt werden, daß SHEPHARD zum Beweis dieses Lemmas das Theorem von VENKOV und MCMULLEN nicht benutzt. \diamond

Wir gehen in mehreren Schritten vor, um die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ für Zonotope zu beweisen. Im ersten Schritt wird gezeigt, daß die orientierten Matroide die zu raumpflasternden Zonotopen gehören, regulär sind. Dann ist das \mathbb{Z} -Erzeugnis der Cokreise eines solchen regulären orientierten Matroids ein reguläres Gitter, dessen DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop kombinatorisch äquivalent zu dem ursprünglichen raumpflasternden Zonotop ist. Danach erreichen wir sogar affine Äquivalenz, indem wir das Skalarprodukt geeignet anpassen.

Theorem 4.2.3. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix vom Rang d , in der je zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind, und $Z(S) = [-\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1] + \dots + [-\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n]$ das zugeordnete d -dimensionale Zonotop. Die nachfolgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Das Zonotop $Z(S)$ ist ein Paralleloeder.

ii) (COXETER/VENKOV-Bedingung)

Jeder $(d-2)$ -dimensionale Untervektorraum, der durch Spaltenvektoren von S erzeugt wird, ist entweder in zwei oder in drei $(d-1)$ -dimensionalen Untervektorräumen enthalten, die durch Spaltenvektoren von S erzeugt werden. Oder: Das Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_S ist ein VENKOV-Arrangement, siehe Definition 4.2.4.

iii) Es sei $\mathcal{C}^* \subseteq \{-, 0, +\}^n$ die Menge der Cokreise des orientierten Matroids $\mathcal{M}(S)$. Dann ist $L := \langle \mathcal{C}^* \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein d -dimensionales reguläres Gitter. Es gilt $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(L)$.

iv) Es gibt ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n derart, daß das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop des zonotopalen Gitters L zu $Z(S)$ affin äquivalent ist.

Beweis.

i) \implies ii)

Es sei zuerst $d = 2$. Mit elementaren Mitteln zeigen wir (Wir schrecken schließlich vor nichts zurück!), daß Z entweder ein Viereck oder ein Sechseck ist.

Das Zonotop Z ist ein ebenes, zentralsymmetrisches $2n$ -Eck (siehe Korollar 2.4.3). Die Summe seiner $2n$ Innenwinkel beträgt $2n\pi - 2\pi = 2(n-1)\pi$. Wegen der Zentralsymmetrie sind gegenüberliegende Innenwinkel gleich groß. So können wir die Innenwinkel gegen den Uhrzeigersinn mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zyklisch beschriften. Wir focussieren einen Eckpunkt von Z , der dem Innenwinkel α_i gegenüberliegt. Da Z die Ebene durch Translate pflastert, wird dieser Eckpunkt von Eckpunkten von Translaten des Zonotops Z berührt, die den Innenwinkel α_{i-1} und α_{i+1} gegenüberliegen (beachte die zyklische Beschriftung). D.h. jeder Innenwinkel von Z kommt an den $2n$ Eckpunkten von Z in der Pflasterung mindestens dreimal vor. Daraus ergibt sich die Ungleichung $2n \cdot 2\pi \geq 3(2(n-1))\pi$, bzw. $n \leq 3$. Falls Z ein Viereck ist, ist nach Korollar 2.4.3 $Z = [-s_1, s_1] + [-s_2, s_2]$, und $\{0\}$ ist in den zwei Untervektorräumen $\mathbb{R}s_1$ und $\mathbb{R}s_2$ enthalten. Ansonsten ist $Z = [-s_1, s_1] + [-s_2, s_2] + [-s_3, s_3]$ ein Sechseck, und $\{0\}$ ist in den drei Untervektorräumen $\mathbb{R}s_1, \mathbb{R}s_2$ und $\mathbb{R}s_3$ enthalten. (COXETER gibt in [Cox62] einen besseren Beweis an, der ohne Skalarprodukte auskommt.)

Nun sei $d > 2$. Wir wählen einen $(d-2)$ -dimensionalen Untervektorraum, der durch Spaltenvektoren von S erzeugt wird. Da der Rang von S die volle Dimension d beträgt, lassen sich Spaltenvektoren v und w von S finden, so daß $\mathbb{R}^d = U \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$ gilt. Mit π wird die Projektion von \mathbb{R}^d auf $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$ längs U bezeichnet. Es ist $Z' := \pi(Z)$ ein zweidimensionales Zonotop, was nach Lemma 4.2.2 die Ebene $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$ durch Translate pflastert. Falls Z' ein Viereck ist, dann besitzt es die Form $Z' = [-\alpha v, \alpha v] + [-\beta w, \beta w]$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, ansonsten ist es ein Sechseck und es läßt schreiben als $Z' = [-\alpha v, \alpha v] + [-\beta w, \beta w] + [-(\gamma v + \delta w), \gamma v + \delta w]$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Es sei s ein Spaltenvektor von S und $U \oplus \mathbb{R}s$ ein $(d-1)$ -dimensionaler Untervektorraum. Nach Korollar 2.4.3 muß $\pi(s)$ in einem Summanden von Z' „enthalten“ sein. Wir betrachten $\pi(s)$. Der erste Fall „ Z' ist ein Viereck“ besitzt zwei Unterfälle:

- $\pi(s) \in \mathbb{R}v$, dann folgt $U + \mathbb{R}s = U + \mathbb{R}v$: Da π längs U projiziert, gilt $s \in U + \mathbb{R}v$ und damit $U + \mathbb{R}s \subseteq U + \mathbb{R}v$. Diese beiden Untervektorräume besitzen dieselbe Dimension $d-1$, und die Behauptung folgt.
- $\pi(s) \in \mathbb{R}w$, dann folgt $U \oplus \mathbb{R}s = U \oplus \mathbb{R}w$.

Der zweite Fall „ Z' ist ein Sechseck“ besitzt drei Unterfälle:

- $\pi(s) \in \mathbb{R}v$, dann folgt $U \oplus \mathbb{R}s = U \oplus \mathbb{R}v$.
- $\pi(s) \in \mathbb{R}w$, dann folgt $U \oplus \mathbb{R}s = U \oplus \mathbb{R}w$.
- $\pi(s) \in \mathbb{R}(\gamma v + \delta w)$, dann folgt $U \oplus \mathbb{R}s = U \oplus \mathbb{R}(\gamma v + \delta w)$.

ii) \implies iii)

Wir zeigen zuerst, daß das \mathbb{Z} -Erzeugnis der Menge \mathcal{C}^* der Cokreise des orientierten Matroids $\mathcal{M}(S)$ ein d -dimensionales Gitter im \mathbb{R}^n bildet (siehe dazu auch [McM75]).

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die ersten d Spaltenvektoren der Matrix S linear unabhängig sind. Mit Lemma 4.2.1 folgt, daß auch die Cokreise $X_1 := \Phi^{-1}(F_1), \dots, X_d := \Phi^{-1}(F_d)$ (die Abbildung Φ wurde in Proposition 2.4.2 definiert) linear unabhängig sind. Es wird gezeigt, daß jeder Cokreis von $\mathcal{M}(S)$ eine Linearkombination der Cokreise X_1, \dots, X_d ist.

Es sei ein Cokreis $X \in \mathcal{C}^*$ vorgegeben. Dann existieren d linear unabhängige Spaltenvektoren $\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_d$ der Matrix S , von denen $d-1$ parallel zur Facette $\Phi(X)$ liegen. Es gibt eine Kette von linear unabhängigen Spaltenvektorfamilien, die bei $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ startet, bei $\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_d$ endet, wobei sich zwei direkt aufeinanderfolgende Kettenglieder nur um einen Vektor unterscheiden. Somit genügt es, die Behauptung für zwei direkt aufeinanderfolgende Kettenglieder zu beweisen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Schritt von den linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ zu den linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{d-1}, \mathbf{s}_{d+1}$. Es seien $\mathbf{c}'_1, \dots, \mathbf{c}'_{d-1}, \mathbf{c}'_{d+1}$ die zu $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{d-1}, \mathbf{s}_{d+1}$ gehörenden Facettenmittelpunktvektoren und $X'_1, \dots, X'_{d-1}, X'_{d+1}$ die zugeordneten Cokreise.

Es sei (nach evtl. Umsortierung und Vorzeichenwechsel)

$$\mathbf{s}_{d+1} = \sum_{i=k+1}^d \alpha_i \mathbf{s}_i \quad \text{mit } \alpha_i > 0, i = k+1, \dots, d, \text{ und } k < d-1. \quad (4.1)$$

Gegeben sei $j \in \{1, \dots, d-1, d+1\}$. Wir wollen nun zeigen, daß sich der Cokreis X'_j als Linearkombination der Cokreise X_1, \dots, X_d darstellen läßt.

1. Fall: $1 \leq j \leq k$

Aus der Gleichung (4.1) ist ersichtlich, daß die Hyperebenen $\mathbb{R}\mathbf{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_d$ und $\mathbb{R}\mathbf{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{d-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{d+1}$ übereinstimmen. Somit gilt $\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j$ und $X'_j = X_j$.

2. Fall: $k+1 \leq j \leq d-1$

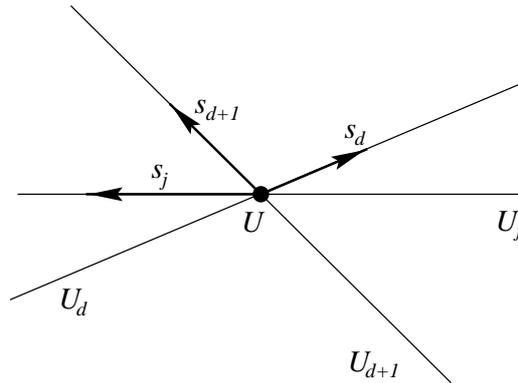
Es ist $U = \mathbb{R}\mathbf{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j-1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{j+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{d-1}$ ein $(d-2)$ -dimensionaler Untervektorraum, der von Spaltenvektoren von S erzeugt wird. Nach Voraussetzung gibt es maximal drei paarweise verschiedene $(d-1)$ -dimensionale Untervektorräume, die U enthalten und von Spaltenvektoren von S erzeugt werden. Dies sind

- $U_j := U \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_j$,
- $U_d := U \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_d$,
- $U_{d+1} := U \oplus \mathbb{R}\mathbf{s}_{d+1}$.

Demnach lassen sich die Spaltenvektoren von S in vier disjunkte Klassen einteilen:

- $K_0 := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \in U\}$,
- $K_j := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \notin K_0, \mathbf{s} \in U_j\}$,
- $K_d := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \notin K_0, \mathbf{s} \in U_d\}$,
- $K_{d+1} := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \notin K_0, \mathbf{s} \in U_{d+1}\}$.

Im folgenden wird angenommen, daß eine gesamte Klasse K_i auf einer Seite der Hyperebene U_k , $k \in \{j, d, d+1\} \setminus \{i\}$ liegt, und zwar auf der gleichen wie der Vektor \mathbf{s}_i , $i \in \{j, d, d+1\}$.

Abbildung 4.1: Lage der Hyperebenen U_j , U_d und U_{d+1} .

Es gilt $\mathbf{c}_j = \sum_{\mathbf{s} \in K_j} \mathbf{s} + \sum_{\mathbf{s} \in K_{d+1}} \mathbf{s}$, da $\mathbf{c}_j = \mathbf{s}_j + \sum_{i=d+1}^n X_{ji} \mathbf{s}_i$ und $|X_{ji}| = 1$ genau dann, wenn $\mathbf{s}_i \in K_j \cup K_{d+1}$. Aus (4.1) ist ersichtlich (orthogonale Projektion auf U_d^\perp), daß \mathbf{s}_j und \mathbf{s}_{d+1} auf der gleichen Seite der Hyperebene U_d liegen. Demnach ist $X_{ji} = 1$ genau dann, wenn $\mathbf{s}_i \in K_j \cup K_{d+1}$. Weiter gilt $\mathbf{c}'_j = \sum_{\mathbf{s} \in K_j} \mathbf{s} - \sum_{\mathbf{s} \in K_d} \mathbf{s}$ und $\mathbf{c}_d = \mathbf{c}'_{d+1} = \sum_{\mathbf{s} \in K_d} \mathbf{s} - \sum_{\mathbf{s} \in K_{d+1}} \mathbf{s}$. Es folgt $\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_d$, d.h. $X'_j = X_j - X_d$.

3. Fall: $j = d + 1$

Die gleiche Argumentation wie im 1. Fall liefert $\mathbf{c}'_{d+1} = \mathbf{c}_d$, d.h. $X'_{d+1} = X_d$.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß $L = \langle \mathcal{C}^* \rangle_{\mathbb{Z}}$ ein reguläres Gitter ist und daß das orientierte Matroid $\mathcal{M}(L)$ dieselben Cokreise wie $\mathcal{M}(S)$ besitzt. Die zweite Aussage bekommen wir durch Proposition 2.3.3, da die orientierten Matroide $\mathcal{M}(S)$ und $\mathcal{M}(L)$ denselben Rang haben und die Menge der Covektoren von $\mathcal{M}(S)$ in der Menge der Covektoren von $\mathcal{M}(L)$ enthalten ist. Daraus folgt, daß der Träger jedes nicht-trivialen Gittervektors den Träger eines elementaren Gittervektors enthält, was die Charakterisierung iii) aus Proposition 3.1.2 eines reguläres Gitters ist.

iii) \implies iv)

Der \mathbb{R}^n sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Dann ist das Gitter L ein zontopales Gitter. Mit π bezeichnen wir die bzgl. des Standardskalarprodukts orthogonale Projektion von \mathbb{R}^n auf den d -dimensionalen von L erzeugten Untervektorraum. Das DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop von L ist kombinatorisch äquivalent zu $Z(S)$. Also sind die orientierten Matroide $\mathcal{M}(S)$ und $\mathcal{M}(L)$ gleich. Demnach gilt $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi))$ mit $\mathfrak{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Nach Proposition 2.3.14 und Theorem 2.3.16 sind sie nach Auffüllung der Matrix S durch Nullzeilen projektiv äquivalent, d.h. es gibt eine reguläre Matrix $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine positive Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $S = AM_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi)D$.

Wir wählen nun das Skalarprodukt $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$. Es sei π' die bzgl. (\cdot, \cdot) orthogonale Projektion von \mathbb{R}^n auf den d -dimensionalen Untervektorraum, der von L erzeugt wird. Im folgenden wird gezeigt, daß wir eine reguläre Matrix $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ finden können, die die Gleichung $BM_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi)D = M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi')$ erfüllt. Dann folgt die Gleichung $S = AB^{-1}M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi')$ und das Zonotop $Z(S)$ ist affin äquivalent zum DIRICHLET-VORONOÏ-Polytop $Z(M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi'))$ des zontopalen Gitters L .

Es seien \mathfrak{A} eine Basis des Untervektorraums, der von L erzeugt wird, und \mathfrak{A}' eine Basis des Orthogonalraumes, der bzgl. des Standardskalarproduktes gebildet wird. Dann ist $D^{-1}\mathfrak{A}'$ eine Basis des Orthogonalraumes, der bzgl. des Skalarproduktes (\cdot, \cdot) gebildet wird.

Wir haben die Gleichung

$$M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi) = M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1},$$

und analog

$$M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi') = M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1}.$$

Wir definieren die Matrix

$$C := \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1} D M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}).$$

Dann ist $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)C$ eine Blockmatrix, in der höchstens der $(d \times d)$ -Hauptminor, der den vollen Rang d hat, keine nicht-trivialen Einträge besitzt.

Wir setzen

$$C_1 := \left(\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)C + \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \right)^{-1},$$

außerdem definieren wir

$$B := M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) C_1 \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} BM_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi)D &= M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) C_1 \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1} M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi) \\ &= M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) C_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1} D \\ &= M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) C_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) C \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1} \\ &= M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \left(M_{\mathfrak{E}}^{(\mathfrak{A}, D^{-1}\mathfrak{A}')}(\text{id}) \right)^{-1} \\ &= M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(\pi'), \end{aligned}$$

so wie gewünscht.

iv) \implies i)
Ist trivial. ◇

Als Nebenprodukt erhalten wir durch Theorem 4.2.3 mehrere Charakterisierungen der regulären orientierten Matroide.

Definition 4.2.4. Es sei $S = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Vektorkonfiguration, in der je zwei Vektoren linear unabhängig sind. Sie bestimmt das *Hyperebenenarrangement* $\mathcal{A}_S = (H_1, \dots, H_n)$ im \mathbb{R}^d , wobei $H_i := (\mathbb{R}\mathbf{s}_i)^\perp$, $i = 1, \dots, n$, ist. Ein Hyperebenenarrangement heißt *VENKOV-Arrangement*, falls der Durchschnitt von $d - 2$ Hyperebenen dieses Arrangements in zwei oder in drei Durchschnitten von $d - 1$ Hyperebenen dieses Arrangements enthalten ist.

Korollar 4.2.5. Es sei $S \in \mathbb{R}^{d \times n}$ eine Matrix vom Rang d , in der je zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Das orientierte Matroid $\mathcal{M}(S)$ ist genau dann regulär, wenn das Hyperebenenarrangement \mathcal{A}_S ein VENKOV-Arrangement ist.

Korollar 4.2.6. (siehe dazu auch Exercise 4.45 in [BVSZ93])

Es sei \mathcal{C}^* die Menge der Cokreise eines orientierten Matroids \mathcal{M} , das den Rang d besitzt. Das orientierte Matroid \mathcal{M} ist genau dann regulär, wenn das Gitter $L = \langle \mathcal{C}^* \rangle_{\mathbb{Z}}$ d -dimensional ist.

Literaturverzeichnis

- [BL76] THOMAS H. BRYLAWSKI, DEAN LUCAS. *Uniquely representable combinatorial geometries*. In *Theorie Combinatoire* (Proc. 1973 Internat. Colloq.), 83–104. Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [BR76] EVGENII P. BARANOVSKII, SERGEI S. RYSHKOV. *C-types of n -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelhedra (with application to the theory of coverings)*. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **137** (1976).
- [BVSWZ93] ANDERS BJÖRNER, MICHEL LAS VERGNAS, BERND STURMFELS, NEIL WHITE, GÜNTER M. ZIEGLER. *Oriented matroids*. *Encyclopedia of Mathematics* **46**. Cambridge University Press, 1993.
- [Bry75] THOMAS H. BRYLAWSKI *Modular constructions for combinatorial geometries*. *Transactions of the American Mathematical Society* **203** (1975), 1–44.
- [CS88] JOHN H. CONWAY, NEIL J.A. SLOANE. *Sphere packing, lattices and groups*. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **290**. Springer-Verlag, 1988.
- [CS92] JOHN H. CONWAY, NEIL J.A. SLOANE. *Low dimensional lattices VI: Voronoi reduction of three-dimensional lattices*. *Proceedings of the Royal Society, London* **436** (1992), 55–68.
- [Con97] JOHN H. CONWAY (assisted by FRANCIS Y.C. FUNG). *The sensual (quadratic) form*. *The Carrus Mathematical Monographs* **26**. The Mathematical Association of America, 1997.
- [Cox62] HAROLD S.M. COXETER. *The classification of zonohedra by means of projective diagrams*. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **41** (1962), 137–156.
- [DG99] VLADIMIR DANILOV, VIATCHESLAV GRISHUKIN. *Maximal unimodular systems of vectors*. *European Journal of Combinatorics* **20** (1999), 507–526.
- [Dic72] T.J. DICKSON. *On Voronoi reduction of positive definite quadratic forms*. *Journal of number theory* **4** (1972), 330–341.
- [Eng98] PETER ENGEL. *Investigations of parallelhedra in \mathbb{R}^d* . In *Voronoi's impact on modern science*. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine **21** (1998), 22–60.
- [ES86] HERBERT EDELSBRUNNER, REIMUND SEIDEL. *Voronoi diagrams and arrangements*. *Discrete Computational Geometry* **1** (1986), 25–44.
- [ER94] ROBERT M. ERDAHL, SERGEI S. RYSHKOV. *On lattice dicing*. *European Journal of Combinatorics* **15** (1999), 451–481.

- [Erd98] ROBERT M. ERDAHL. *Space filling zonotopes and Voronoi's conjecture on parallelotopes*. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.* **20** (1998), 2–15.
- [Erd99] ROBERT M. ERDAHL. *Zonotopes, dicings, and Voronoi's conjecture on parallelotopes*. *European Journal of Combinatorics* **20** (1999), 527–549.
- [Ger82] LOTHAR GERRITZEN. *Die Jacobi-Abbildung über dem Raum der Mumfordkurven*. *Mathematische Annalen* **261** (1982), 81–100.
- [GL87] PETER M. GRUBER, CORNELIS G. LEKKERKERKER. *Geometry of numbers*. North-Holland, 1987.
- [Jae83] FRANÇOIS JAEGER. *On space-tiling zonotopes and regular chain groups*. *Ars. Comb. B* **16** (1983), 257–270.
- [Jan98] SINAIDA JANZEN. *Voronoi-Zellen von Gittern erster Art*. Diplomarbeit. Fachbereich Mathematik, Universität Dortmund, 1998.
- [Jaq93] DAVID-OLIVIER JAQUET-CHIFFELLE. *Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7*. *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), 21–55.
- [Kne00] MARTIN KNESER. *Quadratische Formen*. Springer-Verlag, erscheint September 2000.
- [Loe90] HEINZ-FRIEDER LOESCH. *Zur Reduktionstheorie von Delone-Voronoi für matroidische quadratische Formen*. Dissertation. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [McM75] PETER MCMULLEN. *Space tiling zonotopes*. *Mathematika* **22** (1975), 202–211.
- [McM80] PETER MCMULLEN. *Convex bodies which tile space by translation*. *Mathematika* **27** (1980), 113–121.
- [Min97] HERMANN MINKOWSKI. *Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder*. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse* (1897), 198–219.
- [MRS95] LOUIS MICHEL, SERGEI S. RYSHKOV, MAJORIE SENECHAL. *An extension of Voronoi's theorem on primitive parallelotopes*. *European Journal of Combinatorics* **16** (1995), 59–63.
- [Neu92] JÜRGEN NEUKIRCH. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag, 1992.
- [Oxl92] JAMES G. OXLEY. *Matroid theory*. Oxford University Press, 1992.
- [Roc69] R. TYRELL ROCKAFELLAR. *The elementary vectors of a subspace of \mathbb{R}^N* . In *Combinatorial mathematics and its applications* (Proc. Chapel Hill Conf.), 104–127. Univ. North Carolina Press, 1969.
- [Roc70] R. TYRELL ROCKAFELLAR. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [Sey80] PAUL D. SEYMOR. *Decomposition of regular matroids*. *Journal of combinatorial theory, Series B* **28** (1980), 305–359.
- [She74] GEOFFREY C. SHEPHARD. *Space-filling zonotopes*. *Mathematika* **21** (1974), 261–269.

- [SS88] GÜNTER SCHEJA, UWE STORCH. *Lehrbuch der Algebra (Unter Einschluß der linearen Algebra), Teil 2*. B.G. Teubner Stuttgart, 1988.
- [Trü92] KLAUS TRÜMPER. *Matroid decomposition*. Academic Press, 1992.
- [Tut58] WILLIAM T. TUTTE. *A homotopy theorem for matroids I, II*. *Transactions of the American Mathematical Society* **88** (1958), 144–174.
- [Tut59] WILLIAM T. TUTTE. *Matroids and graphs*. *Transactions of the American Mathematical Society* **90** (1959), 527–552.
- [Tut71] WILLIAM T. TUTTE. *Introduction to the theory of matroids*. American Elsevier Publishing Company, 1971.
- [Val99] FRANK VALLENTIN, *Zur Komplexität des „Shortest Vector Problem“ und seine Anwendung in der Kryptographie*. Diplomarbeit. Fachbereich Informatik, Universität Dortmund, 1999.
- [Ven54] BORIS A. VENKOV. *On a class of euclidean polytopes* (in Russisch). *Vestnik Leningrad Univ. (Ser. Mat. Fiz. Him.)* **9** (1954), 11–31.
- [Vor08] GEORGES F. VORONOÏ. *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, Premier Mémoire, Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **133** (1908), 67–178.
- [Vor09] GEORGES F. VORONOÏ. *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, Deuxième Mémoire, Recherches sur les paralléloèdres primitifs*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **134** (1908), 198–287 und **136** (1909), 67–181.
- [Zie95] GÜNTER M. ZIEGLER. *Lectures on polytopes*. *Graduate Texts in Mathematics* **152**. Springer-Verlag, 1995.
- [Zhi29] O. K. ZHITOMIRSKII. *Verschärfung eines Satzes von Woronoi*. *Z. Leningrad Fiz.-Mat. Ovsc* **2** (1929), 131–151.
- [Zon96] CHUANMING ZONG. *Strange phenomena in convex and discrete geometry*. Universitext. Springer-Verlag, 1996.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, FRANK VALLENTIN, daß ich die Diplomarbeit mit dem Titel: „Über die Paralleloeder-Vermutung von VORONOÏ“ selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Dortmund, den 4. Mai 2000

Einverständniserklärung des Urhebers

Ich, FRANK VALLENTIN, erkläre mich einverstanden, daß meine Diplomarbeit nach §6 (1) des URG der Öffentlichkeit durch die Übernahme in die Bereichsbibliothek zugänglich gemacht wird. Damit können Leser der Bibliothek die Arbeit einsehen und zu persönlichen wissenschaftlichen Zwecken Kopien aus dieser Arbeit anfertigen. Weitere Urheberrechte werden nicht berührt.

Dortmund, den 4. Mai 2000