EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATIK DES OPERATIONS RESEARCH

OR: - ENTWICKLUNG & EINSATZ QUANTITATIVER MODELLE & METHODEN ZUR ENTSCHEIDUNGSUNTERSTÜTZUNG

- GEPRÄGT DURCH ZUSAMMENARBEIT VON MATHEMATIK, WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN & INFORMATIK

(nach GESELLSCHAFT FÜR OR e.V.)

KAPITEL 1: EINFÜHRUNG – STABILE MATCHINGS

→ NOBELPREIS ÖKONOMIE 2012:
für ROTH & SHAPLEY
für „THEORY OF STABLE ALLOCATIONS AND THE PRACTICE OF MARKET DESIGN"

§ 1 GRUNDBEGRIFFE

DEFINITION: Gegeben Mengen $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ und $\mathcal{F} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit je n Elementen.
Ein Matching ist dann eine Bijektion $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$.

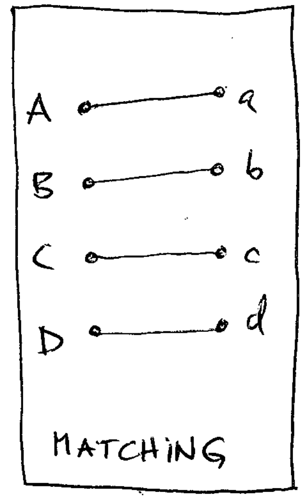
INTERPRETATION:

- $\mathcal{M}$ = Menge von n Männern, $\mathcal{F}$ = Menge von n Frauen
- Matching $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{F} \hat{=}$ n „traditionelle" Hochzeiten: monogam, keine gleichgeschlechtlichen Ehen, niemand bleibt ledig.
- Jeder Mann hat Präferenzliste für Frauen, und umgekehrt.
  → dargestellt durch 2 Matrizen mit je n^2 Einträgen

Beispiel:

Männer				
A:	c	b	d	a
B:	b	a	c	d
C:	b	d	a	c
D:	c	a	d	b

Frauen				
a:	A	B	D	C
b:	C	A	D	B
c:	C	B	D	A
d:	B	A	C	D



Notation: $c >_A b \Leftrightarrow$ „Mann A bevorzugt Frau c gegenüber Frau b."

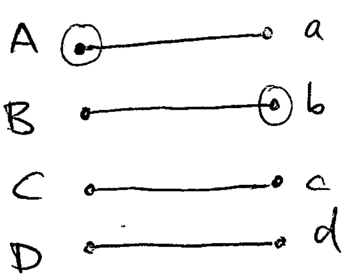
(analog: $C >_a B$)

Definition: Ein Matching $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ heisst <u>stabil</u>, wenn für alle $M \in \mathcal{M}$ und alle $f \in \mathcal{F}$ mit $\sigma(M) \neq f$ gilt, dass

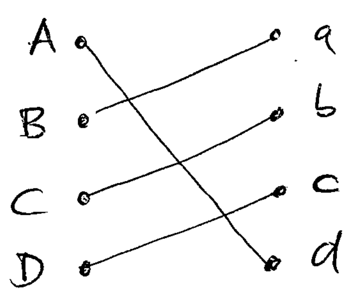
$$\sigma(M) >_M f \quad \text{oder} \quad \sigma^{-1}(f) >_f M.$$

⌜Sonst könnte Interesse an einem Seitensprung bestehen.⌟

In unserem Beispiel:



NICHT STABIL!



STABIL

Anwendungen:

z.B. Verteilung von Studenten auf Hochschulen, von Ärzten auf Krankenhäuser, etc

FRAGEN: 1) Wie findet man ein stabiles Matching?

2) Gibt es immer eins?

NAIVE ANTWORT ZU 1): Teste alle $n!$ Möglichkeiten

Keine gute Idee:

n	Rechenzeit (Annahme: pro Bijektion 10^{-9})
10	0,003 Sek.
15	21 Min.
20	77 Jahre
25	$4{,}9 \cdot 10^8$ Jahre ($\approx \frac{1}{10}$ Alter der Erde)

§2 GALE-SHAPLEY ALGORITHMUS

Viel bessere Antwort auf 1) (und 2))

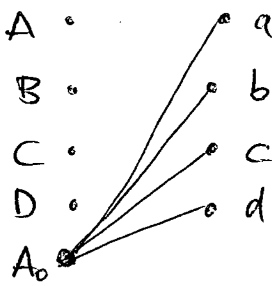
ALGORITHMUS (in Pseudocode)

Verlobe Frauen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit virtuellem Mann A_0,
den jede Frau am wenigsten bevorzugt.
for $k = 1$ **to** n
$M = A_k$
while $M \neq A_0$ **do**
f = beste verbleibende Frau auf M's Liste
M macht f Heiratsantrag
if $M >_f$ aktueller Verlobter von f **then**
verlobe M und f
M = bisheriger Verlobter von f
if $M \neq A_0$ **then**
streiche f von M's Liste

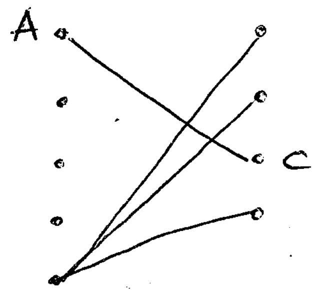
IN UNSEREM BEISPIEL:

Männer	Frauen
A: ~~c~~ ~~b~~ d a	a: A B D C A_0
B: ~~b~~ a c d	b: C A D B A_0
C: b d a c	c: C B D A A_0
D: c a d b	d: B A C D A_0

$k=1$:

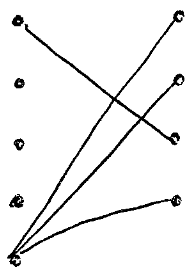


$M=A$

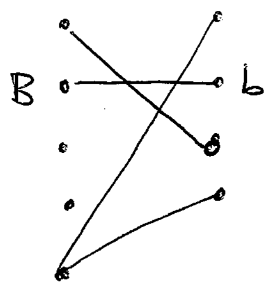


$M=A_0$

$k=2$:

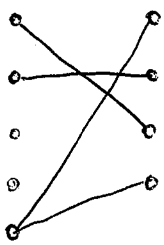


$M=B$

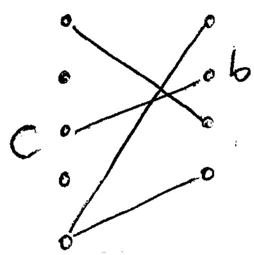


$M=A_0$

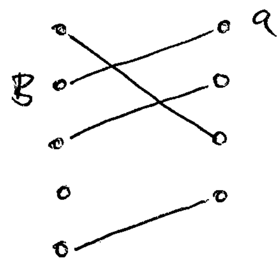
$k=3$:



$M=C$

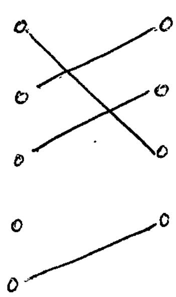


$M=B$

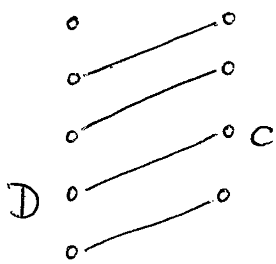


$M=A_0$

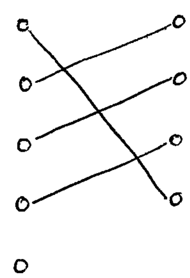
$k=4$:



$M=D$



$M=A$



$M=A_0$

SATZ: Der Gale-Shapley Algorithmus berechnet ein stabiles Matching. Insbesondere gibt es immer eines.

BEWEIS: 1) Der Algorithmus ist wohldefiniert:
Die Listen der Männer sind niemals leer.

⌜ Angenommen, die Liste von M wäre leer.
Dann ist M von allen Frauen abgewiesen worden.
Jede Frau ist aber mit höchstens einem Mann verlobt, die Situation der Frauen verschlechtert sich nie und M ist stets besser als A_0.
Es muss also neben M (und A_0) n „echte" Männer geben. $\lightning$ ⌟

2) Das resultierende Matching ist stabil.

⌜ Angenommen $\sigma(M) \neq f$ und $f >_M \sigma(M)$.
Dann ist M im Laufe des Algorithmus von f abgewiesen worden und $\sigma^{-1}(f) >_f M$. ⌟

BEMERKUNG: Im Algorithmus werden $\leq n^2$ Heiratsanträge gemacht. (s. erstes Aufgabenblatt)
$\longrightarrow$ Viel effizienter als $n!$.