<u>SATZ</u>: Der GS-Algorithmus berechnet das für die Männer beste stabile Matching, d.h. wenn f von M's Liste entfernt wird, dann gibt es kein stabiles Matching mit $\sigma(M)=f$.

<u>LEMMA</u>: Falls „streiche f von M's Liste" aufgerufen wird, gibt es einen Mann $\tilde{M}$: $\tilde{M} >_f M$ und $f >_{\tilde{M}}$ alle Frauen auf $\tilde{M}$'s verbleibender Liste

<u>BEWEIS</u>: Dies passiert, wenn 1) M möchte f heiraten, aber es gibt einen Mann $\tilde{M}$, den aktuellen Verlobten von f, mit $\tilde{M} >_f M$.

oder

2) M und f waren verlobt, aber es gibt einen Mann $\tilde{M}$ mit $\tilde{M} >_f M$, der f einen Heiratsantrag gemacht hat.

Es gibt also (in beiden Situationen) einen Mann $\tilde{M}$ mit $\tilde{M} >_f M$, für den auch gilt:

$f >_{\tilde{M}}$ alle Frauen auf $\tilde{M}$'s verbleibender Liste. □

<u>BEWEIS DES SATZES</u>:

<u>ZEIGEN</u>: $\forall$ stabilen Matchings σ und $M \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{F}$:

$\sigma(M)=f \Rightarrow f$ wird nicht von M's Liste gestrichen.

Angenommen, das stimmt nicht.

Dann gibt es ein stabiles Matching σ mit mind. einem Paar (M,f):

• $\sigma(M) = f$ • f wird von M's Liste gestrichen.

Wähle unter diesen Paaren (M, f) dasjenige aus, bei dem die „Streichung" am frühesten passiert (im Laufe des Algorithmus).

Nach dem Lemma gibt es $\tilde{M}$ mit $\tilde{M} >_f M$ und $f >_{\tilde{M}}$ alle Frauen auf $\tilde{M}$'s verbleibender Liste (zum Zeitpunkt der Streichung).

Betrachte $\sigma(\tilde{M})$:

Da σ stabil, gilt $\sigma(\tilde{M}) >_{\tilde{M}} f = \sigma(M)$.

Das heisst $\sigma(\tilde{M})$ wurde zu einem früheren Zeitpunkt von $\tilde{M}$'s Liste gestrichen. $\lightning$ zur Wahl von (M, f) $\square$

Korollar: Das stabile Matching, das der GS-Algorithmus berechnet, ist unabhängig von der Reihenfolge der Männer und Frauen.

§3 Geometrische Modellierung

Der GS-Algorithmus ist ein KOMBINATORISCHER ALGORITHMUS (verwendet keine Zahlen)

Vorteil: + sehr schnell, effizient

Nachteil: – relativ kompliziert

– sehr problemspezifisch
(kann aber angepasst werden,
z.B. n Frauen, m Männer,
unvollständige Präferenzlisten)

JETZT: GEOMETRISCHE MODELLIERUNG
mit linearen Ungleichungen.

Vorteil: + einfache Modellierung
+ leicht veränderbar

Nachteil: – im Allgemeinen nicht schnellste Lösungsmethode

CODIERE Matching $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{M} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\mathcal{F} = \{a_1, \ldots, a_n\}$
als Permutationsmatrix:

$$X \in \{0,1\}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma(A_i) = a_j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz: $X \in \{0,1\}^{n \times n}$ codiert ein stabiles Matching.

$\iff$ X erfüllt folgende Ungleichungen:

(1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1$ f. a. $i = 1, \dots, n$ (Zeilensummen)

(2) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1$ f. a. $j = 1, \dots, n$ (Spaltensummen)

(3) $x_{ij} \geq 0$ für $i,j = 1, \dots, n$

(4) $x_{ij} + \sum_{k : a_k >_{A_i} a_j} x_{ik} + \sum_{k : A_k >_{a_j} A_i} x_{kj} \geq 1$

für $i,j = 1, \dots, n$ (Stabilitätsbedingung)

Beweis: Klar nach Definition von stabilem Matching.

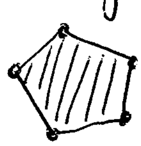
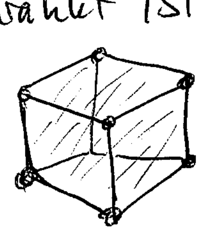
Später in der Vorlesung:

Die Menge

$$SMP := \{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X \text{ erfüllt } (1)-(4) \}$$

ist ein Polytop.

$\hookrightarrow$ Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen, die beschränkt ist

Bsp.:  Polytop (2D) mit 5 Ecken  Polytop (3D) mit 8 Ecken

Vande Vate (1989):

Die Ecken des Polytops SMP codieren genau die stabilen Matchings.

Sei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Heiratsbewertungsmatrix.
(C_{ij} gibt den Wert der Heirat zwischen A_i und a_j an.)

Dann erhält man das optimale stabile Matching bezüglich C mit dem linearen Optimierungsproblem:

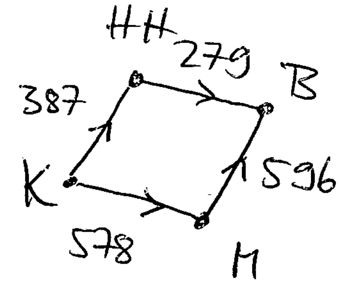
$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

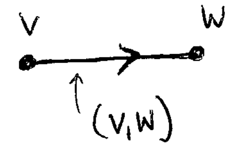
$$X \text{ erfüllt } (1)-(4)$$

KAPITEL 2: KÜRZESTE WEGE

ZIEL: Finde kürzeste Wege in einem Netzwerk.



§ 1 NICHTNEGATIVE KANTENLÄNGEN



NOTATION: $D = (V, A)$ gerichteter Graph

$\hookrightarrow$ V = endliche Menge von Knoten

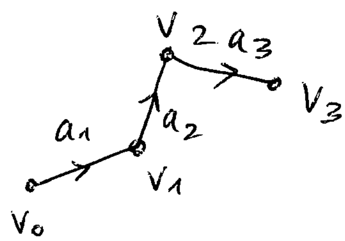
$\hookrightarrow$ $A \subseteq \{(v,w) \in V \times V : v \neq w\}$ gerichtete Kanten

$\ell : A \to \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ Kantenlängen

$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m)$ heisst Kantenfolge,

falls $v_0, \dots, v_m \in V$, $a_1, \dots, a_m \in A$ und $a_i = (v_{i-1}, v_i)$.

Länge von P: $\ell(P) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i)$,



v_0 = Startknoten, v_m = Endknoten.

Wenn $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m+1$, d.h. $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, heißt P v_0-v_m-Weg, oder kurz Weg.

Für Knoten $s, t \in V$ ist der Abstand von s zu t definiert

als $\operatorname{dist}(s,t) := \min\limits_{P\ s\text{-}t\text{-Weg}} \ell(P)$.

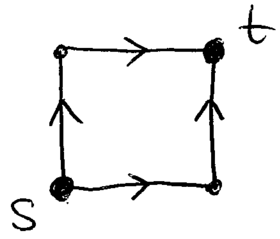
Für eine Knotenmenge $U \subseteq V$ setze $\delta^+(U) := \{(v,w) \in A : v \in U, w \notin U\}$,

$\delta^-(U) := \{(v,w) \in A : v \notin U, w \in U\}$

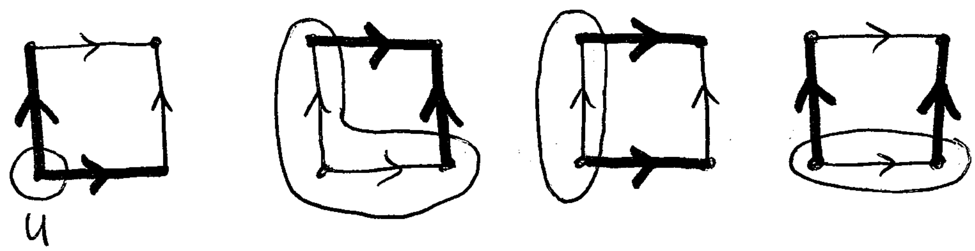
Eine Kantenmenge $A' \subseteq A$ heisst s-t-Schnitt, falls

$A' = \delta^+(U)$ für ein $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \notin U$.

Bsp.:



Alle s-t-Schnitte:



SATZ: (min-max-Charakterisierung kürzester Wege, ROBACKER 1956)

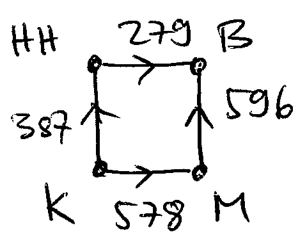
- $D=(V,A)$ gerichteter Graph,
- $s,t\in V$
- $\ell : A \to \mathbb{Z}_+$

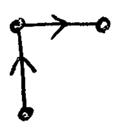
Dann ist $\operatorname{dist}(s,t) = \max k$,

wobei k = Anzahl von s-t-Schnitten $C_1,\dots,C_k$ (mit Vielfachheiten), so dass:

$$\forall a\in A: |\{i=1,\dots,k : a\in C_i\}| \le \ell(a).$$

WICHTIGER PUNKT: Die s-t-Schnitte geben ein Zertifikat, dass ein gegebener s-t-Weg minimal ist.





ist kürzester Weg,

weil es folgende K-B-Schnitte gibt: