<u>Satz</u> (min-max Charakterisierung kürzester Wege)

$D = (V, A)$ gerichteter Graph, $s, t \in V$, $\ell : A \to \mathbb{Z}_+$.

Dann
$$\operatorname{dist}(s,t) = \min_{P \text{ } s\text{-}t\text{-Weg}} \ell(P)$$

$= \max k$, wobei

k = Anzahl von s-t-Schnitten $C_1, \dots, C_k$, so dass für alle $a \in A$
$$|\{j = 1, \dots, k : a \in C_j\}| \leq \ell(a).$$

<u>Bew.:</u> Falls es keinen s-t-Weg gibt, dann ist die Aussage trivial: Beide Seiten sind gleich $+\infty$. Im folgenden: $\exists$ s-t-Weg.

<u>min $\geq$ max:</u> Sei $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$ ein s-t-Weg und seien $C_1, \dots, C_k$ s-t-Schnitte mit o.g. Eigenschaft.

Dann
$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} |\{j = 1, \dots, k : a_i \in C_j\}|$$
$$= \sum_{j=1}^{k} |C_j \cap \{a_1, \dots, a_m\}|$$
$$\geq \sum_{j=1}^{k} 1 = k.$$

<u>min ≤ max</u>: Definiere $U_i = \{v \in V : \mathrm{dist}(s,v) < i\}$

für $i = 1, \ldots, \mathrm{dist}(s,t) = \min$.

Definiere $C_i = \delta^+(U_i) = \{(v,w) \in A : v \in U_i,\ w \notin U_i\}$.

Dies sind $\mathrm{dist}(s,t)$-viele s-t-Schnitte. Es sei

$a = (u,v) \in A$ eine Kante. Es gilt

$$\ell(a) \geq \mathrm{dist}(s,v) - \mathrm{dist}(s,u).$$

Andererseits enthalten nur die s-t-Schnitte

$$C_{\mathrm{dist}(s,u)+1}, \ldots, C_{\mathrm{dist}(s,v)}$$

diese Kante a, was $\mathrm{dist}(s,v) - \mathrm{dist}(s,u)$ viele sind. $\boxtimes$

§ 2 Beliebige Kantenlängen

Manchmal nützlich: negative Kantenlängen.

z.B. Finde längste s-t-Wege (d.h. finde kürzesten, negativen Weg).

<u>Bsp.</u>: Rucksackproblem

Rucksack hat 2,5 ℓ Volumen, 5 nützliche Gegenstände

Gegenstand i	Volumen a_i	Nutzen c_i
1: Schlafsack	1,5 l	4
2: Taschenmesser	0,5 l	4
3: Kekse	1 l	3
4: Thermoskanne	1,5 l	5
5: Isomatte	1 l	4

<u>Aufgabe</u> Finde Auswahl von $1, \dots, 5$, so dass die Gegenstände in den Rucksack passen und ihr summierter Nutzen maximal ist.

<u>Formulierung als kürzeste Wege Problem</u>

<u>Knoten</u> $(i, x) \in V \quad i = 0, 1, \dots, 6, \quad x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{5}{2}.$

<u>Kanten</u>
$$\left.\begin{array}{l} - \ ((i-1,x),(i,x)) \text{ mit Länge } 0 \\ - \ ((i-1,x),(i,x+a_i)) \text{ mit Länge } -c_i \end{array}\right\} i = 1, \dots, 5$$
- $((5,x),(6,\frac{5}{2}))$ mit Länge 0 für alle x

<u>Dann</u>: Kürzeste $(0,0) - (6, \frac{5}{2})$ Wege geben optimale Auswahl.

Algorithmus von Bellman-Ford

Eingabe $D=(V,A)$ gerichteter Graph, $n=|V|$, $s\in V$,
$\ell : A \to \mathbb{Z}$

Ausgabe Funktionen $d_0,\dots,d_n : V \to \mathbb{Z}$
$g : V \to V$

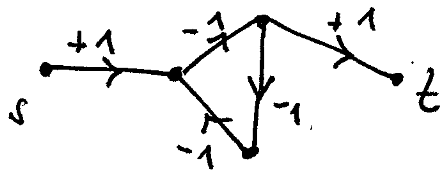
$d_0(s)=0$, $d_0(v)=\infty \quad \forall v\in V\setminus\{s\}$

for $k=0$ to $n-1$:
  $d_{k+1}(v) = d_k(v) \quad \forall v \in V$
  for $(u,v)\in A$:
    if $d_{k+1}(v) > d_k(u) + \ell(u,v)$:
      $d_{k+1}(v) = d_k(u)+\ell(u,v)$
      $g(v)=u$
if $d_n \neq d_{n-1}$:
  output "$\exists$ gerichteter negativer Kreis, der von s erreichbar ist".

Satz $d_k(v) = \min\{\ell(P) : P$ ist s-v-Kantenfolge, die $\leq k$ Kanten enthält$\}$.

Bew.: (triviale) Induktion nach k.

<u>Mögliches Problem</u>: gerichtete Kreise negativer Länge.



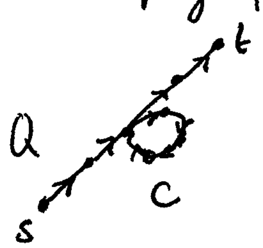
kürzeste s-t Kantenfolge existiert nicht

<u>Def.</u>: Kantenfolge $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$ heisst (<u>gerichteter</u>) <u>Kreis</u>, falls $v_0 = v_m$ und $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m$.

<u>Satz</u> $D = (V, A)$ ger. Graph, $l : A \to \mathbb{Z}$. Alle ger. Kreise in D haben nicht-negative Länge. Seien $s, t \in V$ durch Kantenfolge verbunden. Dann $\exists$ kürzeste s-t-Kantenfolge, die ein Weg ist.

<u>Bew.</u>: Klar: $\exists$ kürzester s-t Weg P.

Ang. $\exists$ s-t-Kantenf. Q mit $l(P) > l(Q)$. Wähle solches Q mit min. Anzahl von Kanten. Da Q kein Weg ist, enthält Q einen Kreis C. Nach Vor. $l(C) \geq 0$. Sei Q' die Kantenfolge, die man aus Q erhält, wenn man C löscht.



Dann ist Q' ebenfalls s-t-Kantenf. mit

$$l(Q') = l(Q) - l(C) \leq l(Q) < l(P),$$

aber mit weniger Kanten als Q. Widerspruch!