Zurück zu Bellman-Ford:

- Laufzeit: proportional zu $|V| \cdot |A| \leq |V|^3$
- Falls D keine ger. Kreise negativer Länge enthält, dann $d_{n-1}(v) = dist(s,v)$

  und $v, g(v), g(g(v)), \ldots, s$ ist Umkehrung eines kürzesten s-v-Weges.

<u>Satz</u> $d_n = d_{n-1} \iff$ alle von s aus erreichbaren ger. Kreise haben nicht-negative Länge.

<u>Bew.</u>: $\rightarrow$ Aufgabe 3.1.

§ 3 Geometrische Modellierung, Potentiale

<u>Def.</u>: Fkt. $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ heisst <u>Potential</u> für D, l, falls

$$\forall a = (u,v) \in A: \quad p(v) - p(u) \leq l(a).$$

Satz $\exists$ Potential $p: V \to \mathbb{R}$ für D, ℓ

$\iff$ $\forall$ ger. Kreise C in D gilt $\ell(C) \geq 0$.

Bew.: „$\Longrightarrow$": Sei $C = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$ mit $v_0 = v_m$ ein Kreis und sei p eine Potentialfkt. Dann

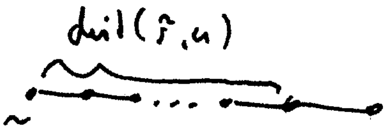
$$\ell(C) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \big(p(v_i) - p(v_{i-1})\big) = 0.$$

„$\Longleftarrow$": Füge zu $D = (V, A)$ einen neuen Knoten $\tilde{s}$ und neue Kanten $(\tilde{s}, t)$ für alle $t \in V$ hinzu, wobei $\ell(\tilde{s}, t) = 0$ definiert wird. Dann ist $p(t) = \operatorname{dist}(s, t)$ eine Potentialfkt. Argument dafür: $\forall a = (u, v) \in A$:

$$p(v) - p(u) = \operatorname{dist}(\tilde{s}, v) - \operatorname{dist}(\tilde{s}, u) \leq \ell(a)$$

$$\iff \operatorname{dist}(\tilde{s}, v) \leq \operatorname{dist}(\tilde{s}, u) + \ell(a).$$

Dies gilt, weil



ist eine s-v-Kantenfolge der Länge $\operatorname{dist}(\tilde{s}, u) + \ell(a)$ und, weil alle ger. Kreise nicht-negative Länge haben, gibt es eine kürzeste s-v-Kantenfolge, die ein Weg ist, also:

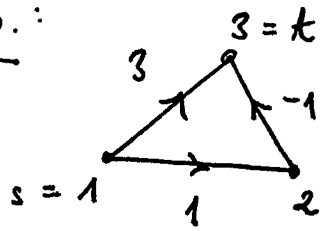
$$\operatorname{dist}(\tilde{s}, v) \leq \operatorname{dist}(\tilde{s}, u) + \ell(a).$$

Satz (geometrische Modellierung kürzester Wege mit linearen Ungleichungen)

$D = (V, A)$ ger. Graph, $l : A \to \mathbb{Z}$ Längenfkt. Alle ger. Kreise haben nicht-negative Länge. Seien $s, t \in V$ und es gibt einen s-t-Weg. Dann

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(s,t) &= \min_{P \; s\text{-}t\text{-Weg}} l(P) \\
&= \max \; p(t) - p(s) \\
&\qquad p : V \to \mathbb{R} \\
&\qquad p(v) - p(u) \le l(a) \quad \forall a = (u,v) \in A.
\end{aligned}
$$

Bsp.:



$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(1,3) &= \max \; p_3 - p_1 \\
&\qquad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \\
&\qquad p_2 - p_1 \le 1 \\
&\qquad p_3 - p_1 \le 3 \\
&\qquad p_3 - p_2 \le -1 \\
&= \max \; (-1, 0, +1)\, p \\
&\qquad p \in \mathbb{R}^3 \\
&\qquad (-1, 1, 0)\, p \le 1 \\
&\qquad (-1, 0, 1)\, p \le 3 \\
&\qquad (0, -1, 1)\, p \le -1
\end{aligned}
$$

Bew.: max $\leq$ min Sei $P = (\overset{s}{\overset{\shortparallel}{v_0}}, a_1, v_1, \dots, a_m, \overset{t}{\overset{\shortparallel}{v_m}})$ s-t-Kantenfolge und $p: V \to \mathbb{R}$ Potential. Dann

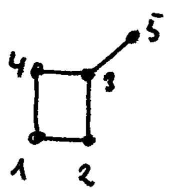
$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \left(p(v_i) - p(v_{i-1})\right) = p(t) - p(s).$$

max $\geq$ min Setze $p(v) = \operatorname{dist}(s, v)$, falls v zu einer s-v-Kantenfolge gehört, und $p(v) = 0$ sonst. Überprüfe (wie eben), dass p ein Potential ist.

Kapitel 3 Matchings in bipartiten Graphen

§ 1 Definitionen

$G = (V, E)$ ungerichteter Graph, wobei
  V = endliche Menge von Knoten,
  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V,\ u \neq v\}$ ungerichtete Kanten



$V = \{1, \dots, 5\}$
$E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}, \{3,5\}\}$.

Definiere Kantenfolge, Weg, Kreis wie bei gerichteten Graphen.
Sei $v \in V$, dann heisst $w \in V$ Nachbar von v, falls $\{v, w\} \in E$.

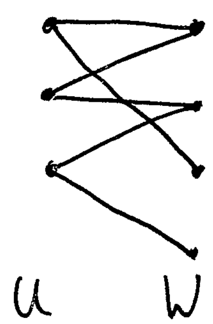
$u, v \in V$ heissen *wegzusammenhängend*, falls es einen u-v-Weg gibt.

Die Relation „wegzusammenhängend" ist eine Äquivalenzrelation, ihre Äquivalenzklassen heissen *Zusammenhangskomponenten*.

Falls G nur eine Zshgkomp. besitzt, so heisst G *zusammenhängend*.

Der Graph $G = (V, E)$ heisst *bipartit*, falls $U, W \subseteq V$ existieren, so dass $V = U \dot{\cup} W$ (d.h. $V = U \cup W$ und $U \cap W = \emptyset$)

und $\forall e \in E : |e \cap U| = |e \cap W| = 1$.



§ 2 Matchings mit maximaler Kardinalität

Def.: Sei $G = (V, E)$ ein unger. Graph. Ein *Matching* $M \subseteq E$ in G ist eine Teilmenge disjunkter Kanten, d.h.

$\forall e, f \in M : \quad e \cap f = \emptyset$.