Fall 3: $a \notin U_M, b \in W_M$.

Ang. $a \notin C$. Weil $a \notin U_M$ und $a \notin C$ gibt es ein $w_i \in C$ mit $(w_i, a) \in A_M$. Somit gibt es einen ger. Weg in D_M von U_M nach w_i. Dieser kann um $(w_i, a), (a, b)$ verlängert werden, was einem M-augmentierenden Weg entspricht. Widerspruch zur Maximalität von M. D.h. $a \in C$.

Fall 4: $a \notin U_M, b \notin W_M$.

Falls $a \in C$, dann ist alles o.k. Sei nun $a \notin C$. Dann gibt es ein w_i mit $\{a, w_i\} \in M$ und $w_i \in C$. Falls $w_i = b$, dann ist $b \in C$ und alles ist o.k. Falls $w_i \neq b$, dann gibt es einen ger. Weg von U_M nach w_i und dieser kann um $(w_i, a), (a, b)$ erweitert werden, d.h. $b \in C$.

$\boxtimes$

§4 Matchings mit maximalem Gewicht

gegeben: $G = (V, E)$ unger. Graph, $w: E \to \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion.

Für $M \subseteq E$ definiere $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$

gesucht: $\nu_w(G) = \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$.

Def.: Matching $M \subseteq E$ heisst <u>extrem</u>, falls
$\forall M' \subseteq E$ Matching mit $|M'| = |M|$ gilt $w(M') \leq w(M)$.

Def.: Sei $M \subseteq E$ Matching in G. Definiere die Längen-fkt. $\ell : E \to \mathbb{R}$ durch

$$\ell(e) = \begin{cases} w(e), & \text{falls } e \in M \\ -w(e), & \text{falls } e \notin M. \end{cases}$$

Für $P \subseteq E$ definiere $\ell(P) = \sum_{e \in P} \ell(e)$.

Satz Sei $M \subseteq E$ extremes Matching und $P \subseteq E$ sei ein M-augmentierender Weg minimaler Länge. Dann ist $M' = M \triangle P$ extrem.

Bew.: Sei N ein extremes Matching mit $|N| = |M| + 1$. Da $|N| > |M|$ ist, enthält der Graph $(V, M \cup N)$ eine Zshg.komp., die M-augmentierender Weg ist. Dann $\ell(Q) \geq \ell(P)$.
Es ist $N \triangle Q$ ein Matching mit $|N \triangle Q| = |M|$.
Also $w(N \triangle Q) \leq w(M)$ und zusammen

$$w(N) = w(N \triangle Q) - \ell(Q) \leq w(M) - \ell(P) = w(M'),$$

d.h. M' ist extrem. $\boxtimes$

Algorithmus Bestimmung eines Matching mit max. Gewicht („ungarische Methode", Egerváry 1931)

$M_0 = \emptyset$; $k = 1$;

while $\exists$ M_{k-1} - augmentierender Weg

Wähle M_{k-1} - augmentierenden Weg P mit min. Länge

$M_k = M_{k-1} \triangle P$

$k = k + 1$

output $\max \{ w(M_i) : i = 0, 1, \dots, k-1 \}$.

Finde M_{k-1} - augmentierenden Weg mit min. Länge:

Betrachte wieder Residualgraph D_M $(M = M_{k-1})$.

$$D_M = (V, A_M), \quad A_M = \{ (u,w) \in U \times W : \{u,w\} \in E \setminus M \} \cup \{ (w,u) \in W \times U : \{u,v\} \in E \cap M \}$$

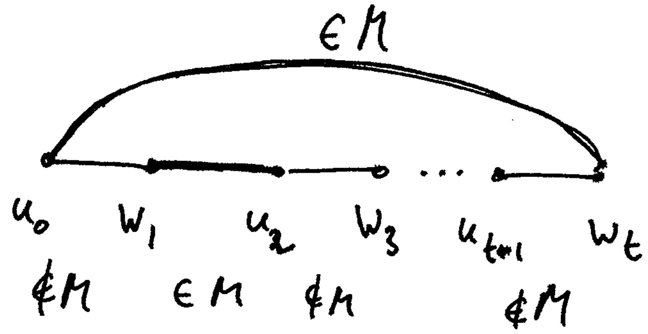
mit Längenfkt. $\ell : A_M \to \mathbb{R}$

$$\ell((a,b)) = \ell(\{a,b\}).$$

Finde kürzesten Weg von U_M nach W_M. Dies kann man mit Bellman-Ford machen, weil D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge besitzt:

Satz Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching. Dann besitzt D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge.

Bew.: Angenommen $C \subseteq E$ entspricht einem ger. Kreis in D_M mit $\ell(C) < 0$. Situation:



Dann ist $M' = M \Delta C$ ein Matching mit $|M'| = |M|$ und es gilt

$$w(M') = w(M) - \ell(C) > w(M),$$

d.h. M ist nicht extrem. Widerspruch! $\boxtimes$