Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Zirkulation*, wenn in jedem Knoten das Flusserhaltungsgesetz gilt:

$$\forall v \in V : \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(a)} f(a).$$

Sei C ein gerichteter Kreis in D. Definiere

$$\chi^C : A \to \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \chi^C(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } C \text{ durch } a \text{ geht,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist genau dann eine Zirkulation, wenn es gerichtete Kreise $C_1, \ldots, C_k$ in D und positive reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gibt, so dass $f = \alpha_1 \chi^{C_1} + \cdots + \alpha_k \chi^{C_k}$.

Aufgabe 5.2 Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Zeige: Die maximale Anzahl von kantendisjunkten Wegen von s nach t in D ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t Schnittes in D.

Aufgabe 5.3 Verwende den Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses, um zu entscheiden, ob es eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $a_{i,j} \geq 0$ für alle $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ gibt, die folgende lineare Bedingungen erfüllt:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (1,1,1)A = (5,7), \quad A \leq \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Vergleiche sind hier komponentenweise zu verstehen. Zum Beispiel bedeutet $v \leq w$ für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, dass $v_i \leq w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $B \leq C$ für Matrizen $B = (b_{i,j})$ und $C = (c_{i,j})$, dass $b_{i,j} \leq c_{i,j}$ für alle i und j.

Aufgabe 5.4 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls ihr *Epigraph*

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \leq \alpha\}$$

eine konvexe Menge ist. Für $k = 1, \ldots, n$ definiere die Funktion $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die einem Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ die Summe seiner k größten Einträge zuordnet. Zeige, dass f_k für alle k konvex ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 13. Mai, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.