Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 6 —

Aufgabe 6.1 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$. Sei $y = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$ mit Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \geq 0$. Zeige, dass es $m \leq N$, $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, N\}$ sowie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \geq 0$ gibt, so dass $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ linear unabhängig sind und $y = \sum_{k=1}^m \beta_k x_{i_k}$ gilt.

Aufgabe 6.2 Das konvexe Polytop P_n ist folgendermaßen definiert:

$$P_n = \mathrm{conv}\{(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))^{\mathsf{T}} : \pi \in S_n\},$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ ist.

a) Wie sieht P_3 aus?

b) Bestimme $\dim(P_3)$.

Aufgabe 6.3 Beweise oder widerlege: Die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen, d.h.

$$A = \overline{A} \Rightarrow \mathrm{conv}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)}.$$

Aufgabe 6.4 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeige, dass die metrische Projektion $\pi_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|\pi_C(x) - \pi_C(y)\| \leq 1 \cdot \|x - y\|.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 20. Mai, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.