Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 7 —

Aufgabe 7.1 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere abgeschlossene und konvexe Menge. Zeige, dass C als der Durchschnitt seiner stützenden Halbräume dargestellt werden kann, d.h. dass

$$C = \bigcap_{H \text{ Stützhyperebene von } C} H^-$$

gilt.

Aufgabe 7.2 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. Zeige: $x \in \operatorname{conv}(A)$ ist genau dann ein Extrempunkt von $\operatorname{conv}(A)$, wenn $x \in A$ und $x \notin \operatorname{conv}(A \setminus \{x\})$.

Aufgabe 7.3 Bestimme die Ecken der folgenden Polyeder:

a) $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \leq b\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y \leq -1, x - 2y - z \leq 2, -x + y - z \leq -1,$
$x - 2y - 2z \leq 2\}$.

Aufgabe 7.4 Die Polare A^* einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$A^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^{\mathsf{T}} y \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}.$$

Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für $\alpha > 0$ gilt $(\alpha A)^* = \frac{1}{\alpha} A^*$, wobei generell $\beta B = \{\beta b : b \in B\}$ für $\beta \in \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

b) Falls $A \subseteq B$, dann folgt $A^* \supseteq B^*$.

c) Es ist $(B_n^1)^* = B_n^\infty$, wobei $B_n^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$ und $B_n^\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq 1\}$ die Einheitskugeln bezüglich der 1-Norm bzw. der Maximumsnorm sind.

Abgabe: Bis Dienstag, 27. Mai, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.