Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2014

— Aufgabenblatt 8 —

Aufgabe 8.1 Schreibe das Polytop

$$\begin{aligned} P &= \text{conv}\,\{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\} \\ &= \text{conv}\,\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, -e_1 + e_2, -e_1 - e_2, \\ &\qquad\qquad e_1 + e_3, e_1 - e_3, -e_1 + e_3, -e_1 - e_3, \\ &\qquad\qquad e_2 + e_3, e_2 - e_3, -e_2 + e_3, -e_2 - e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

als Polyeder, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 8.2 Es sei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,$$

ein Polyeder. Angenommen P besitzt eine Ecke. Zeige: Das Polyeder P enthält keine Gerade

$$\ell = \{c + \lambda d : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad c, d \in \mathbb{R}^n,\ d \neq 0.$$

Aufgabe 8.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeige:

a) Es gibt genau dann einen Vektor $x \geq 0$ mit $Ax = 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\mathsf{T} A > 0$ gibt.

b) Es gibt genau dann einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\mathsf{T} A > 0$ gibt.

Aufgabe 8.4 Sei $m \geq n + 1$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ so, dass $Ax \leq b$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Zeige, dass es $k \leq m$ und Indizes $i_1, \ldots, i_k$ gibt, für die das Teilsystem $a_{i_1}^\mathsf{T} x \leq b_{i_1}, \ldots, a_{i_k}^\mathsf{T} x \leq b_{i_k}$ keine Lösung besitzt und für die die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{i_1}^\mathsf{T} & b_{i_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i_k}^\mathsf{T} & b_{i_k} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{k \times (n+1)}$$

Rang k hat. Hierbei ist a_i die i-te Zeile von A (als Spaltenvektor geschrieben) und b_i der i-te Eintrag von b.

Hinweis: Kombiniere das Lemma von Farkas mit dem Satz von Carathéodory (bzw. Aufgabe 6.1).

Abgabe: Bis Dienstag, 3. Juni, 12:00 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.