Im Folgenden: Fasse Weg $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ als

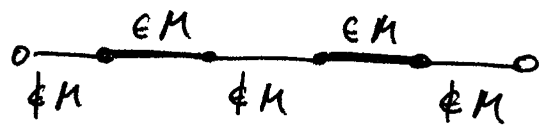
Teilmenge $P = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq E$ auf.

Def.: Sei $M \subseteq E$ ein Matching. Ein Weg $P \subseteq E$ heisst **M-augmentierend**, falls

a) seine Endknoten nicht von M überdeckt sind

b) seine Kanten alternierend aus M und nicht aus M sind.

Bsp.:



Klar: Falls P M-augmentierender Weg ist, dann ist

$$M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M) \qquad \text{(symmetrische Differenz)}$$

ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

Satz Sei M ein Matching in G. Entweder ist M ein Matching mit maximaler Kardinalität, oder es gibt einen M-augmentierenden Weg.

Bew.: a) M hat max. Kard. $\Rightarrow \nexists$ M-augmentierenden Weg.

(siehe oben).

b) Sei M' Matching mit $|M'| > |M|$. Betrachte Zusammenhangskomponenten von $G' = (V, M \cup M')$.

Da jeder Knoten von G' höchstens 2 Nachbarn hat, bestehen die Zshgkomp. von G' nur aus Wegen (evtl. der Länge 0) oder aus Kreisen (siehe Aufgabe 3.2). Da $|M'| > |M|$ muß es eine Zshgkomp. von G' geben, die mehr Kanten aus M' als aus M enthält. Diese Zshgkomp. ist ein M-augmentierender Weg.

<u>Algorithmus</u> zur Bestimmung eines Matching max. Kardinalität

$M = \emptyset$

While $\exists$ M-augmentierender Weg P

$M = M \triangle P$.

Wie findet man M-augmentierende Wege?

→ einfacher Algorithmus für bipartite Graphen (→ hier)

→ Edmonds „Blüten" - Algorithmus für allg. Graphen (→ Spezialvorlesung).

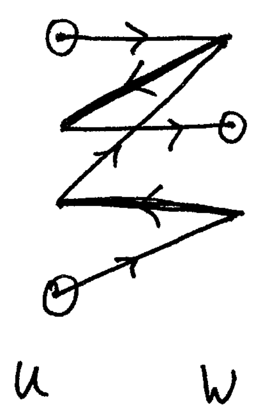
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \dot\cup W$.

Sei $M \subseteq E$ ein Matching.

Definiere gerichteten Residualgraph $D_M = (V, A_M)$ mit

$$A_M = \{ (u,w) \in U \times W : e = \{u,w\} \in E \setminus M \}$$
$$\cup \{ (w,u) \in W \times U : e = \{u,w\} \in E \cap M \}$$

<u>Bsp.</u>:



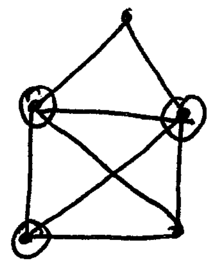
Seien $U_M \subseteq U$, $W_M \subseteq W$ die Knoten, die nicht von M überdeckt werden. Dann entspricht jeder gerichtete Weg von einem Knoten in U_M zu einem Knoten in W_M einem M-augmentierenden Weg und umgekehrt.

<u>Algorithmische Umsetzung</u>:

Finde kürzeste Wege zwischen je zwei Knoten in U_M und W_M mit Bellman-Ford, wobei $l : A_M \to \mathbb{Z}$, $l(a) = 1$ gesetzt wird. [einfache, aber suboptimale Strategie; besser: verwende z.B. Tiefensuche].

§ 3 Königs Matching Theorem

<u>Def.</u>: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heisst <u>Knotenüberdeckung</u>, falls $\forall e \in E: \ |U \cap e| \geq 1$.



<u>Satz</u> (Königs Matching Theorem, 1931)

Sei G ein bipartiter Graph. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} \\ &= \min\{|U| : U \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung von } G\}. \\ &= \tau(G). \end{aligned}$$

<u>Bew.</u>: <u>max ≤ min</u>, Sei M ein Matching und U eine Knotenüberdeckung. Dann $|M| \leq |U|$, weil ~~jeder End~~ je einer der Endknoten der Kanten in M zu U gehören muss.

$\underline{\max \geq \min}$: Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G mit maximaler Kardinalität,

$$M = \{\{u_1, w_1\}, \dots, \{u_m, w_m\}\}, \quad u_i \in U,\ w_i \in W.$$

Betrachte den Residualgraph D_M und definiere

$$C = \{v_1, \dots, v_m\}$$

durch

$$v_i = \begin{cases} w_i, & \text{falls es in } D_M \text{ einen ger. Weg von } U_M \text{ nach } w_i \text{ gibt}, \\ u_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Beh.</u>: C ist Knotenüberdeckung mit $\underbrace{|C| = m}_{\text{klar}}$

<u>Bew.</u>: Sei $\{a,b\} \in E$. z.z. $a \in C$ oder $b \in C$.

OBdA $a \in U$, $b \in W$.

<u>Fall 1</u>: $a \in U_M$, $b \in W_M$.

unmöglich, weil M maximales Matching ist.

<u>Fall 2</u>: $a \in U_M$, $b \notin W_M$.

$(a,b) \in A_M \Rightarrow b \in C$.