Kapitel 4 Flüsse in Netzwerken

§1 Das Max-Flow-Min-Cut Theorem

$D = (V, A)$ gerichteter Graph, $s, t \in V$,

s = Quelle, t = Senke

Def.: $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heisst s-t-Fluss, falls

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \quad \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) \quad \text{gilt.}$$

[Flusserhaltungsgesetz]

Dabei
$$\delta^+(v) = \delta^+(\{v\}) = \{(v,w) \in A : w \in V\}$$
$$\delta^-(v) = \delta^-(\{v\}) = \{(w,v) \in A : w \in V\}.$$

Der Wert eines s-t-Flusses ist

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a).$$

Ein s-t-Fluss f heisst beschränkt durch eine Kapazitätsfkt. $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls $\forall a \in A : f(a) \leq c(a)$ gilt.
(Notation: $f \leq c$)

Ziel: Finde maximalen s-t-Fluss:

$$\max \ \text{value}(f)$$
$$f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$f \ s\text{-}t\text{-Fluss}$$
$$f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A.$$

Lemma Seien $D=(V,A)$, $s,t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Sei f s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist. Sei $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \notin U$, so dass $\delta^+(U)$ ein s-t-Schnitt ist. Dann gilt

$$\text{value}(f) \leq c(\delta^+(U)) = \sum_{a \in \delta^+(U)} c(a). \qquad (*)$$

Es gilt „$=$" in $(*)$ $\Longleftrightarrow$
$$f(a) = c(a) \quad \forall a \in \delta^+(U)$$
$$f(a) = 0 \quad \forall a \in \delta^-(U).$$

Bew.:
$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$
$$\overset{\text{Flusserhaltung}}{=} \sum_{v \in U} \Big(\sum_{a \in \delta^+(v)} f(v) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(v) \Big)$$
$$\overset{\text{F.e.}}{=} \sum_{a \in \delta^+(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(U)} f(a) \leq \sum_{a \in \delta^+(U)} c(a)$$

$\boxtimes$

Def.: $D = (V, A)$ ger. Graph, $a = (u,v) \in A$

Definiere $a^{-1} = (v,u)$ und $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

Sei f s-t-Fluss, c Kapazitätsfkt. Definiere den <u>Residualgraph</u> $D_f = (V, A_f)$ durch

$$A_f = \{ a \in A : f(a) < c(a) \} \cup \{ a^{-1} \in A^{-1} : f(a) > 0 \}$$

<u>Lemma</u> Sei f s-t-Fluss, mit $f \leq c$. Ang. D_f enthält keinen ger. s-t-Weg. Seien $U \subseteq V$ die Knoten, die von s aus erreichbar sind (in D_f). Dann

$$\text{value}(f) = c(\delta^+(U))$$

Insbesondere ist f maximal.

<u>Bew.</u>: Für $a \in \delta^+(U)$ gilt $a \notin A_f$, d.h. $f(a) = c(a)$.

Für $a \in \delta^-(U)$ gilt $a^{-1} \notin A_f$, d.h. $f(a) = 0$.

Also $\text{value}(f) = c(\delta^+(U))$ und f ist nach obigem Lemma maximal.

$\boxtimes$

<u>Def.</u>: Sei P gerichteter Weg in D_f. Definiere
$\chi^P : A \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a \text{ durchläuft,} \\ -1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a^{-1} \text{ durchläuft,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Theorem</u> (Max-Flow = Min-Cut; Ford-Fulkerson 1954)

Seien $D=(V,A)$, $s,t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Dann

$$\max_{\substack{f \text{ s-t-Fluss} \\ f \leq c}} \operatorname{value}(f) = \min_{\substack{U \subseteq V, \\ s \in U,\, t \notin U}} c(\delta^+(U)) .$$

<u>Bew.</u>: <u>$\max \leq \min$</u>: siehe ersten Lemma

<u>$\max \geq \min$</u>: Sei f ein maximaler s-t-Fluss mit $f \leq c$. Zu zeigen: $\operatorname{value}(f) = c(\delta^+(U))$ für ein $U \subseteq V$, $s \in U$, $t \notin U$.

Betrachte D_f. Falls es keinen ger. s-t-Weg in D_f gibt, können wir das zweite Lemma anwenden und sind fertig.
Ang. es gibt s-t-Weg P in D_f. Dann ist $f' = f + \varepsilon \chi^P$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ebenfalls s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist.

Dann $\text{value}(f') = \text{value}(f) + \varepsilon$ ↯ Max. von f. $\boxtimes$

<u>Korollar</u> Falls c ganzzahlig, d.h. $c(a) \in \mathbb{Z}\ \forall a \in A$, dann gibt es ganzz. max s-t-Fluss.

<u>Bew.:</u> Wähle $\varepsilon = 1$ im obigen Beweis.

<u>Algorithmus</u> (Ford-Fulkerson)

<u>input</u> $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

<u>output</u> max. s-t-Fluss f

$f = 0$

while $\exists$ ger. s-t-Weg P in D_f

$f = f + \varepsilon \chi^P$, wobei $\varepsilon > 0$ max. gewählt, so dass $0 \leq f + \varepsilon \chi^P \leq c$ gilt.

<u>Satz</u> Falls $c(a) \in \mathbb{Q}\ \forall a \in A$, dann terminiert der Ford-Fulkerson-Algo. in endlich vielen Schritten; sonst im Allg. nicht.

<u>Bew.:</u> $\exists K \in \mathbb{N}$: $Kc(a) \in \mathbb{N}\ \forall a \in A$. D.h. in jeder Iteration ist ε Vielfaches von $1/K$, und der Wert des Flusses vergrößert sich mind. um $1/K$. Da der Wert